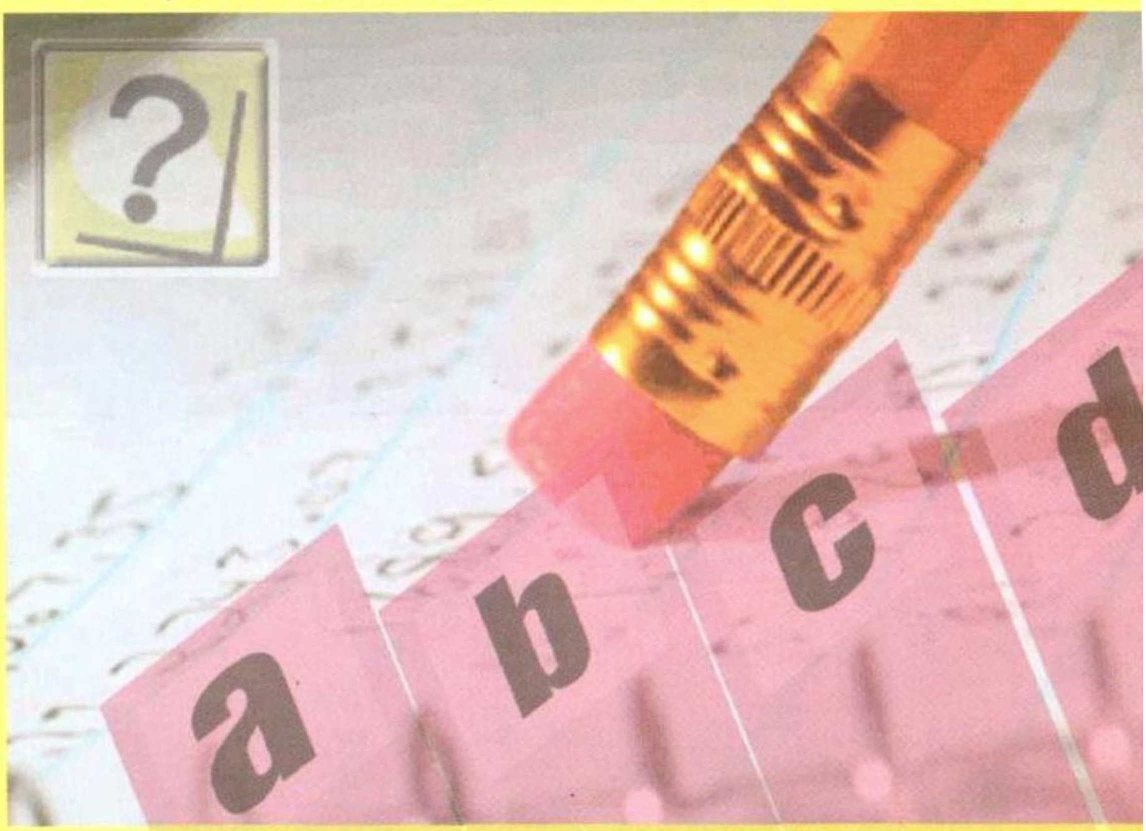
ThS. PHẠM HỒNG DANH - TRẦN MINH QUANG

360 BÀI TẬP
TRẮC NGHIỆM - TỰ LUẬN
LƯỢNG GIÁC

- DÀNH CHO HỌC SINH LỚP 10 - 11 - 12
- LUYỆN THI TỐT NGHIỆP THPT, ĐẠI HỌC & CAO ĐẲNG



NHÀ XUẤT BẢN ĐẠI HỌC QUỐC GIA HÀ NỘI

Ths. PHẠM HỒNG DANH
Cử Nhân TRẦN MINH QUANG

360 BÀI TẬP
TRẮC NGHIỆM - TỰ LUẬN
LƯỢNG GIÁC

DÀNH CHO HỌC SINH LỚP 10 – 11
ÔN THI TUYỂN SINH VÀO ĐẠI HỌC – CAO ĐẲNG

NHÀ XUẤT BẢN ĐẠI HỌC QUỐC GIA HÀ NỘI

Lời Nói Đầu

Chúng tôi biên soạn quyển sách này nhằm chuẩn bị cho việc thi trắc nghiệm bắt đầu từ năm 2007. Bạn đọc là học sinh lớp 10, 11 và học xong lớp 12 chuẩn bị cho kì thi tuyển sinh vào Đại học và Cao đẳng có thể sử dụng sách.

Thi trắc nghiệm là vấn đề mới: chỉ mới thực hiện một lần duy nhất trong kì thi Tú Tài ở Miền Nam Việt Nam vào năm 1974; nên việc biên soạn hệ thống câu hỏi trắc nghiệm và việc học để làm bài trắc nghiệm chắc chắn sẽ có bỡ ngỡ. Trong kì thi tuyển sinh vào Đại học và Cao đẳng số câu trắc nghiệm môn lượng giác là 5 câu, thời gian làm 5 câu này là 9 phút. Như vậy để làm bài trong một thời gian ngắn như vậy đòi hỏi đầu tiên là thí sinh phải thuộc nằm lòng các công thức lượng giác, có kĩ năng tính toán nhanh, đôi khi không cần làm bài chi tiết phải có khả năng phán đoán đúng, sai,... Để được như thế ta trước tiên phải tập dợt bằng các bài toán tự luận nhỏ, không quan tâm các bài toán quá dài, khó như trước.

Việc biên soạn hệ thống câu hỏi trắc nghiệm lần đầu tiên sẽ có một số câu chưa hay, chúng tôi chỉ gạn lọc được sau quá trình giảng dạy cho học sinh nên chúng tôi sẽ rút kinh nghiệm chỉnh sửa trong các lần tái bản.

Xin bạn đọc lượng thứ!

Các tác giả

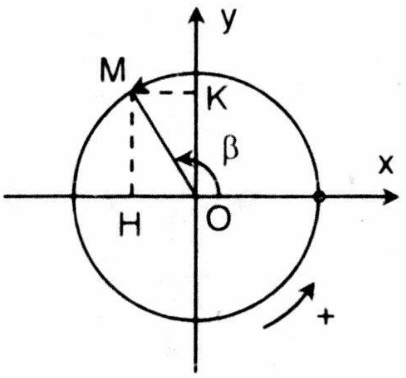
Chương 1. CÔNG THỨC LƯỢNG GIÁC

I. Định nghĩa

Trên Mặt phẳng Oxy cho đường tròn lượng giác tâm O bán kính $R = 1$ và điểm M trên đường tròn lượng giác mà sđ$\overset{\frown}{AM} = \beta$ với $0 \le \beta \le 2\pi$

Đặt $\alpha = \beta + k2\pi,\ k \in Z$

Ta định nghĩa:



$$\sin\alpha = \overline{OK} \text{ và } \cos\alpha = \overline{OH}$$

$$\tan\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} \text{ với } \cos\alpha \neq 0$$

$$\cot\alpha = \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} \text{ với } \sin\alpha \neq 0$$

II. Bảng giá trị lượng giác của một số cung (hay góc) đặc biệt

Góc α Giá trị	$0(0^0)$	$\frac{\pi}{6}(30^0)$	$\frac{\pi}{4}(45^0)$	$\frac{\pi}{3}(60^0)$	$\frac{\pi}{2}(90^0)$
$\sin\alpha$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
$\cos\alpha$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
$\tan\alpha$	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	$\Vert$
$\cot\alpha$	$\Vert$	$\sqrt{3}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	0

III. Hệ thức cơ bản

$$\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$$

$$1 + \tan^2 a = \frac{1}{\cos^2 a} \text{ với } \alpha \neq \frac{\pi}{2} + k\pi\ (k \in Z)$$

$$1 + \cot^2 a = \frac{1}{\sin^2 a} \text{ với } \alpha \neq k\pi\ (k \in Z)$$

IV. Cung liên kết (Cách nhớ: cos đối, sin bù, tang sai π; phụ chéo)

a) Đối nhau: α và −α

$\sin(-\alpha) = -\sin\alpha$ **$\cos(-\alpha) = \cos\alpha$**

$\tan(-\alpha) = -\tan(\alpha)$ $\qquad\qquad$ $\cot(-\alpha) = -\cot(\alpha)$

b) Bù nhau: α *và* $\pi - \alpha$

$\sin(\pi - \alpha) = \sin\alpha$ $\qquad\qquad$ $\cos(\pi - \alpha) = -\cos\alpha$

$\tan(\pi - \alpha) = -\tan\alpha$ $\qquad\qquad$ $\cot(\pi - \alpha) = -\cot\alpha$

c) Sai nhau π*:* α *và* $\pi + \alpha$

$\sin(\pi + \alpha) = -\sin\alpha$ $\qquad\qquad$ $\cos(\pi + \alpha) = -\cos\alpha$

$\tan(\pi + \alpha) = \tan\alpha$ $\qquad\qquad$ $\cot(\pi + \alpha) = \cot\alpha$

d) Phụ nhau: α *và* $\frac{\pi}{2} - \alpha$

$$\sin\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \cos\alpha \qquad\qquad \cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \sin\alpha$$

$$\tan\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \cot\alpha \qquad\qquad \cot\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \tan\alpha$$

e) Sai nhau $\frac{\pi}{2}$*:* α *và* $\frac{\pi}{2} + \alpha$

$$\sin\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) = \cos\alpha \qquad\qquad \cos\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) = \sin\alpha$$

$$\tan\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) = -\cot\alpha \qquad\qquad \cot\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) = -\tan\alpha$$

Chú ý: với $k \in Z$

$$\sin(x + k\pi) = (-1)^k \sin x \qquad\qquad \cos(x + k\pi) = (-1)^k \cos x,$$

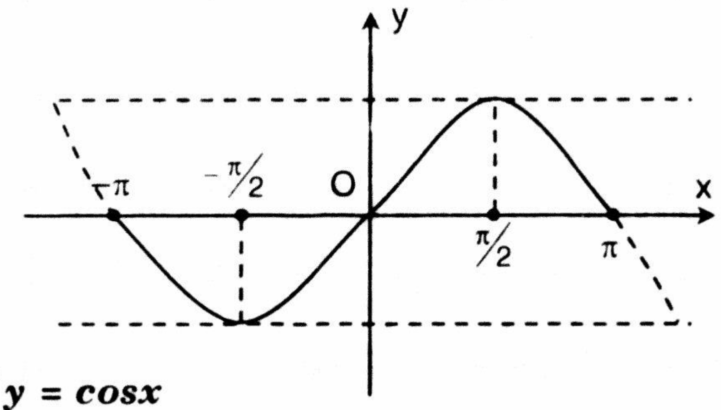
$$\tan(x + k\pi) = \tan x \qquad\qquad \cot(x + k\pi) = \cot x$$

V. Hàm số lượng giác

1. Hàm số y = sinx

- Miền xác định D = R
- $-1 \le \sin x \le 1$
- y = sinx là hàm số lẻ trên R
- y = sinx là hàm tuần hoàn, chu kỳ 2π
- Bảng biến thiên trên $[-\pi, \pi]$

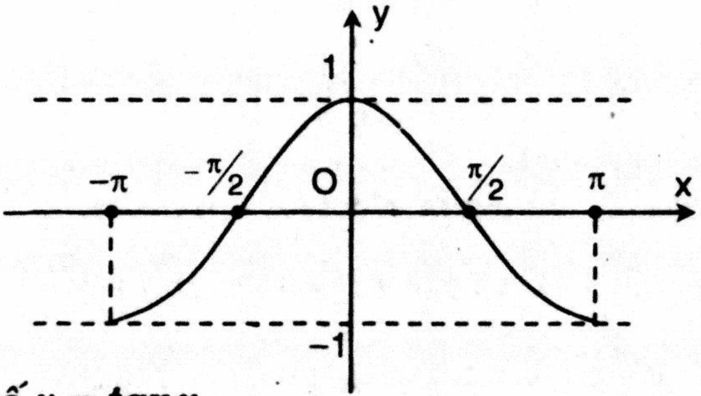
$$\begin{array}{c|ccccccccc} x & -\pi & & -\frac{\pi}{2} & & 0 & & \frac{\pi}{2} & & \pi \\ \hline y = \sin x & 0 & \searrow & -1 & \nearrow & 0 & \nearrow & 1 & \searrow & 0 \end{array}$$



2. *Hàm số y = cosx*

- Miền xác định D = R
- $-1 \le \cos x \le 1$
- y = cosx là hàm số chẵn trên R
- y = cosx là hàm tuần hoàn, chu kỳ 2π
- Bảng biến thiên trên [−π, π]

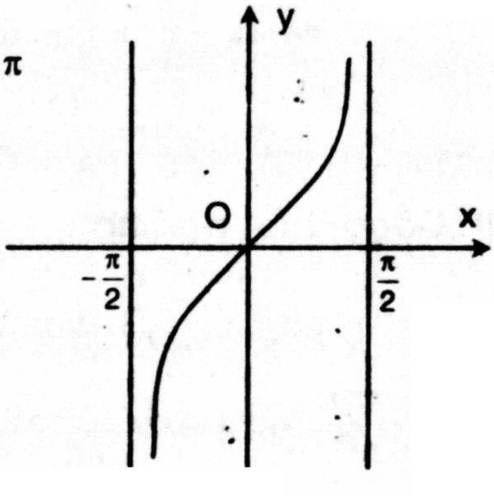
x	−π		0		π
y = cosx	−1	↗	1	↘	−1



3. *Hàm số y = tanx*

- y = tanx xác định với $\forall x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$ (k ∈ Z)
- y = tanx là hàm số lẻ
- y = tanx là hàm tuần hoàn chu kỳ π
- Bảng biến thiên trên $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$

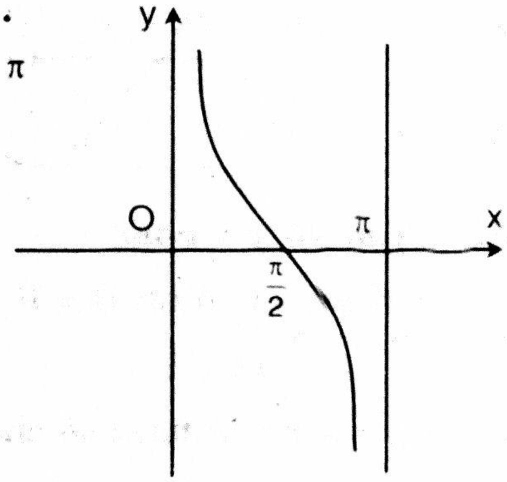
x	$-\frac{\pi}{2}$		0		$\frac{\pi}{2}$
y = tanx	‖ −∞	↗	0	↗	+∞ ‖



4. Hàm số y = cotx

- Tập xác định $D = \{x \in R \,/\, x \neq k\pi,\ k \in Z\}$
- y = cotx là hàm số lẻ
- y = cotx là hàm tuần hoàn chu kỳ π
- Bảng biến thiên trên $(0, \pi)$

x	0		$\frac{\pi}{2}$		π
$y = \cot x$	‖ $+\infty$	↘	0	↘	$-\infty$ ‖



Chú ý: Khi $a \neq 0$

- $y = \sin(ax + b)$ và $y = \cos x(ax + b)$ là hàm số tuần hoàn chu kỳ $\frac{2\pi}{a}$
- $y = \tan(ax + b)$ và $y = \cot x(ax + b)$ là hàm số tuần hoàn chu kỳ $\frac{\pi}{a}$
- Nếu $y = f(x)$ là hàm tuần hoàn có chu kỳ T

  $y = g(x)$ là hàm tuần hoàn có chu kỳ T′ thì $y = f(x) \pm g(x)$ là hàm tuần hoàn có chu kỳ T′ là bội số chung nhỏ nhất của T và T′

Ví dụ: Tìm chu kỳ của $y = \sin 2x + \cos 3x$

$y = \sin x$ có chu kỳ $\frac{2\pi}{2}$, $y = \cos 3x$ có chu kỳ $\frac{2\pi}{3}$

$\Rightarrow y = \sin x + \cos 2x$ là hàm tuần hoàn có chu kỳ 3π

VI. Công thức cộng

$$\sin(a \pm b) = \sin a\cos b \pm \sin b\cos a$$

$$\cos(a \pm b) = \cos a\cos b \pm \sin a\sin b$$

$$\tan(a \pm b) = \frac{\tan a \pm \tan b}{1 \pm \tan a\tan b}$$

VII. Công thức hạ bậc

$$\sin^2 a = \frac{1}{2}(1 - \cos 2a) \qquad \cos^2 a = \frac{1}{2}(1 + \cos 2a)$$

$$\tan^2 a = \frac{1 - \cos 2a}{1 + \cos 2a}$$

VIII. Công thức nhân đôi

$$\sin 2a = 2\sin a\cos a$$

$$\cos 2a = \cos^2 a - \sin^2 a = 1 - 2\sin^2 a = 2\cos^2 a - 1$$

$$\tan 2a = \frac{2\tan a}{1 - \tan^2 a} \qquad \cot 2a = \frac{\cot^2 a - 1}{2\cot a}$$

IX. Công thức nhân ba

$$\sin 3a = 3\sin a - 4\sin^3 a$$

$$\cos 3a = 4\cos^3 a - 3\cos a$$

X. Công thức chia đôi

Đặt $t = \tan\frac{a}{2}$ (với $a \neq \pi + k2\pi$)

$$\sin a = \frac{2t}{1 + t^2} \qquad \cos a = \frac{1 - t^2}{1 + t^2} \qquad \tan a = \frac{2t}{1 - t^2}$$

XI. Công thức biến đổi tổng thành tích

$$\cos a + \cos b = 2\cos\frac{a + b}{2}\cos\frac{a - b}{2}$$

$$\cos a - \cos b = -2\sin\frac{a + b}{2}\sin\frac{a - b}{2}$$

$$\sin a + \sin b = 2\sin\frac{a + b}{2}\cos\frac{a - b}{2}$$

$$\sin a - \sin b = 2\cos\frac{a + b}{2}\sin\frac{a - b}{2}$$

$$\tan a \pm \tan b = \frac{\sin(a \pm b)}{\cos a\cos b}$$

$$\cot a \pm \cot b = \frac{\sin(b \pm a)}{\sin a.\sin b}$$

XII. Công thức biến đổi tích thành tổng

$$\cos a.\cos b = \frac{1}{2}\left[\cos(a + b) + \cos(a - b)\right]$$

$$\sin a.\sin b = \frac{-1}{2}\left[\cos(a + b) - \cos(a - b)\right]$$

$$\sin a.\cos b = \frac{1}{2}\left[\sin(a + b) + \sin(a - b)\right]$$

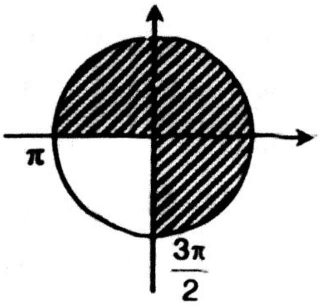
Bài 1. Tính các giá trị lượng giác của α nếu

a) $\sin\alpha = -\frac{1}{5}$ và $\pi < \alpha < \frac{3\pi}{2}$ b) $\cos\alpha = 0,6$ và $\frac{3\pi}{2} < \alpha < 2\pi$

c) $\tan\alpha = \frac{1}{3}$ và $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$ d) $\cot\alpha = -\frac{1}{7}$ và $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$

Giải

a) Do: $\pi < \alpha < \frac{3\pi}{2}$ nên $\cos\alpha < 0$



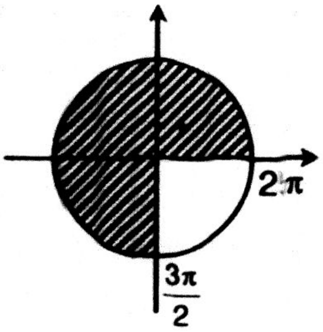
Vậy $\cos\alpha = -\sqrt{1-\sin^2\alpha} = -\sqrt{1-\frac{1}{25}}$

$= \frac{-\sqrt{24}}{5} = \frac{-2\sqrt{6}}{5}$

$\tan\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = \frac{1}{2\sqrt{6}}$

$\cot\alpha = \frac{1}{\tan\alpha} = 2\sqrt{6}$

b) Do: $\frac{3\pi}{2} < \alpha < 2\pi$ nên $\sin\alpha < 0$

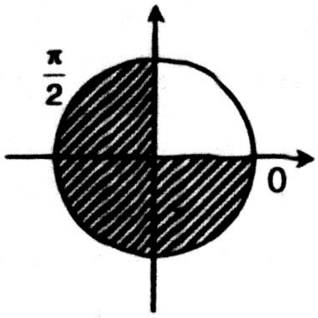


Vậy $\sin\alpha = -\sqrt{1-\cos^2\alpha} = -\sqrt{1-0,36} = -0,8$

$\Rightarrow \tan\alpha = \frac{-0,8}{0,6} = \frac{-4}{3}$ và $\cot\alpha = -\frac{3}{4}$

c) Do: $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$ nên $\sin\alpha > 0$, $\cos\alpha > 0$

Ta có: $\cot\alpha = \frac{1}{\tan\alpha} = 3$



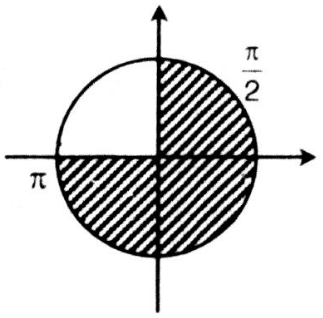
Ta có: $\frac{1}{\cos^2\alpha} = 1 + \tan^2\alpha = 1 + \frac{1}{9} = \frac{10}{9}$

$\Rightarrow \cos^2\alpha = \frac{9}{10} \Rightarrow \cos\alpha = \frac{3}{\sqrt{10}}$

Ta có $\tan\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$

$\Rightarrow \sin\alpha = \tan\alpha.\cos\alpha = \frac{1}{3} \times \frac{3}{\sqrt{10}} = \frac{1}{\sqrt{10}}$

d) Do $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi \Rightarrow \sin\alpha > 0$ và $\cos\alpha < 0$



$$\cot\alpha = -\frac{1}{7} \Rightarrow \tan\alpha = -7$$

$$\frac{1}{\sin^2\alpha} = 1 + \cot^2\alpha = 1 + \frac{1}{49} = \frac{50}{49}$$

$$\Rightarrow \sin\alpha = \frac{7}{5\sqrt{2}}$$

và: $\cos\alpha = \cot\alpha \times \sin\alpha = -\frac{1}{7} \times \frac{7}{5\sqrt{2}} = -\frac{1}{5\sqrt{2}}$. ■

Bài 2. Chứng minh $\frac{\sin^4 a + \cos^4 a - 1}{\sin^6 a + \cos^6 a - 1} = \frac{2}{3}$

Giải

Ta có:

$$\sin^4 a + \cos^4 a - 1 = \left(\sin^2 a + \cos^2 a\right)^2 - 2\sin^2 a\cos^2 a - 1 = -2\sin^2 a\cos^2 a$$

Và: $\sin^6 a + \cos^6 a - 1 = \left(\sin^2 a + \cos^2 a\right)\left(\sin^4 a - \sin^2 a\cos^2 a + \cos^4 a\right) - 1$

$$= \sin^4 a + \cos^4 a - \sin^2 a\cos^2 a - 1$$

$$= \left(1 - 2\sin^2 a\cos^2 a\right) - \sin^2 a\cos^2 a - 1$$

$$= -3\sin^2 a\cos^2 a$$

Do đó $\frac{\sin^4 a + \cos^4 a - 1}{\sin^6 a + \cos^6 a - 1} = \frac{-2\sin^2 a.\cos^2 a}{-3\sin^2 a\cos^2 a} = \frac{2}{3}$. ■

Bài 3. Rút gọn biểu thức $A = \frac{1 + \cos x}{\sin x}\left[1 + \frac{(1 - \cos x)^2}{\sin^2 x}\right]$

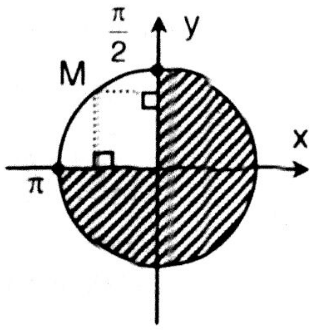
Tính giá trị A nếu $\cos x = -\frac{1}{2}$ và $\frac{\pi}{2} < x < \pi$

Giải

Ta có: $A = \frac{1 + \cos x}{\sin x}\left(\frac{\sin^2 x + 1 - 2\cos x + \cos^2 x}{\sin^2 x}\right)$

$$\Leftrightarrow A = \frac{1 + \cos x}{\sin x}.\frac{2(1 - \cos x)}{\sin^2 x}$$

$$\Leftrightarrow A = \frac{2\left(1-\cos^2 x\right)}{\sin^3 x} = \frac{2\sin^2 x}{\sin^3 x} = \frac{2}{\sin x} \text{ (với } \sin x \neq 0\text{)}$$



Ta có: $\sin^2 x = 1 - \cos^2 x = 1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$

Do: $\frac{\pi}{2} < x < \pi$ nên $\sin x > 0$. Vậy $\sin x = \frac{\sqrt{3}}{2}$

Do đó $A = \frac{2}{\sin x} = \frac{4}{\sqrt{3}} = \frac{4\sqrt{3}}{3}$. ■

Bài 4. Chứng minh các biểu thức sau đây không phụ thuộc x:

a) $A = 2\cos^4 x - \sin^4 x + \sin^2 x\cos^2 x + 3\sin^2 x$

b) $B = \frac{2}{\tan x - 1} + \frac{\cot x + 1}{\cot x - 1}$

Giải

a) Ta có: $A = 2\cos^4 x - \sin^4 x + \sin^2 x\cos^2 x + 3\sin^2 x$

$$\Leftrightarrow A = 2\cos^4 x - \left(1-\cos^2 x\right)^2 + \left(1-\cos^2 x\right)\cos^2 x + 3\left(1-\cos^2 x\right)$$

$$\Leftrightarrow A = 2\cos^4 x - \left(1 - 2\cos^2 x + \cos^4 x\right) + \cos^2 x - \cos^4 x + 3 - 3\cos^2 x$$

$\Leftrightarrow A = 2$ (không phụ thuộc x)

b) Với điều kiện $\sin x.\cos x \neq 0$, $\tan x \neq 1$

Ta có: $B = \frac{2}{\tan x - 1} + \frac{\cot x + 1}{\cot x - 1}$

$$\Leftrightarrow B = \frac{2}{\tan x - 1} + \frac{\frac{1}{\tan x} + 1}{\frac{1}{\tan x} - 1} = \frac{2}{\tan x - 1} + \frac{1 + \tan x}{1 - \tan x}$$

$$\Leftrightarrow B = \frac{2 - (1 - \tan x)}{\tan x - 1} = \frac{1 - \tan x}{\tan x - 1} = -1 \text{ (không phụ thuộc vào x).} \blacksquare$$

Bài 5. Chứng minh

$$\frac{1+\cos a}{2\sin a}\left[1 - \frac{(1-\cos a)^2}{\sin^2 a}\right] + \frac{\cos^2 b - \sin^2 c}{\sin^2 b\sin^2 c} - \text{cotg}^2 b\,\text{cotg}^2 c = \text{cotg}a - 1$$

Giải

Ta có:

- $$\frac{\cos^2 b - \sin^2 c}{\sin^2 b.\sin^2 c} - \text{cotg}^2 b.\text{cotg}^2 c = \frac{\text{cotg}^2 b}{\sin^2 c} - \frac{1}{\sin^2 b} - \text{cotg}^2 b\text{cotg}^2 c$$
$$= \text{cotg}^2 b\left(1 + \text{cotg}^2 c\right) - \left(1 + \text{cotg}^2 b\right) - \text{cotg}^2 b\text{cotg}^2 c = -1 \quad (1)$$

- $$\frac{1 + \text{cosa}}{2\text{sina}}\left[1 - \frac{(1 - \text{cosa})^2}{\sin^2 a}\right] = \frac{1 + \text{cosa}}{2\text{sina}}\left[1 - \frac{(1 - \text{cosa})^2}{1 - \cos^2 a}\right]$$
$$= \frac{1 + \text{cosa}}{2\text{sina}}\left[1 - \frac{1 - \text{cosa}}{1 + \text{cosa}}\right] = \frac{1 + \text{cosa}}{2\text{sina}}.\frac{2\text{cosa}}{1 + \text{cosa}} = \text{cota} \quad (2)$$

Lấy (1) + (2) ta được điều phải chứng minh xong. ■

Bài 6. Rút gọn

a) $A = \tan 18^0 \tan 288^0 + \sin 32^0.\sin 148^0 - \sin 302^0.\sin 122^0$

b) $B = [\tan(90^0 - \alpha) - \cot(90^0 + \alpha)]^2 - [\cot(180^0 + \alpha) + \cot(270^0 + \alpha)]$

c) $C = \dfrac{\cos(-228^0)\cot 72^0}{\tan(-162^0)\sin 108^0} - \tan 18^0$

d) $D = \tan 18^0.\tan 288^0 + \sin 32^0.\sin 148^0 - \sin 302^0.\sin 122^0$

Giải

a) $A = \tan(90^0 - 72^0).\tan(360^0 - 72^0) + \sin 32^0 \sin(180^0 - 32^0)$
$- \sin(360^0 - 58^0)\sin(180^0 - 58^0)$

$A = \cot 72^0.\tan(-72^0) + \sin 32^0.\sin 32^0 - \sin(-58^0)\sin 58^0$
$= -1 + \sin^2 32^0 + \sin^2 58^0 = -1 + \sin^2 32^0 + \cos^2 32^0 = 0$

b) $B = [\cot\alpha + \tan\alpha]^2 - [\cot\alpha + \cot(90^0 + \alpha)]^2$
$= [\cot\alpha + \tan\alpha]^2 - [\cot\alpha - \tan\alpha]^2$
$= (\cot^2\alpha + \tan^2\alpha + 2) - (\cot^2\alpha + \tan^2\alpha - 2) = 4$

c) $$C = \frac{\cos(-228^0)\cot 72^0}{\tan(-162^0)\sin 108^0} - \tan 18^0 = \frac{\cos(72^0 - 360^0)\cot 72^0}{\tan(18^0 - 180^0).\sin(180^0 - 72^0)} - \tan 18^0$$
$$= \frac{\cos 72^0.\cot 72^0}{\tan 18^0.\sin 72^0} - \tan 18^0 = \frac{\cot^2 72^0}{\cot 72^0} - \cot 72^0 = 0$$

d) $D = \tan 18^0.\tan(360^0 - 72^0) + \sin 32^0 \sin(180^0 - 32^0)$
$- \sin(360^0 - 58^0).\sin(180^0 - 58^0)$

$D = -\tan 18^0.\tan 72^0 + \sin^2 32^0 + \sin^2 58^0$

$D = -\tan 18^0 \times \cot 18^0 + \sin^2 32^0 + \cos^2 32^0 = -1 + 1 = 0.$ ■

Bài 7. Cho ΔABC. Chứng minh:

$$\tan\frac{A}{2}\tan\frac{B}{2} + \tan\frac{B}{2}\tan\frac{C}{2} + \tan\frac{C}{2}\tan\frac{A}{2} = 1$$

Giải

Ta có: $\dfrac{A+B}{2} = \dfrac{\pi}{2} - \dfrac{C}{2}$

Vậy: $\tan\dfrac{A+B}{2} = \cot\dfrac{C}{2} \Leftrightarrow \dfrac{\tan\dfrac{A}{2} + \tan\dfrac{B}{2}}{1 - \tan\dfrac{A}{2}.\tan\dfrac{B}{2}} = \dfrac{1}{\tan\dfrac{C}{2}}$

$$\Leftrightarrow \left[\tan\frac{A}{2} + \tan\frac{B}{2}\right]\tan\frac{C}{2} = 1 - \tan\frac{A}{2}\tan\frac{B}{2}$$

$$\Leftrightarrow \tan\frac{A}{2}\tan\frac{C}{2} + \tan\frac{B}{2}\tan\frac{C}{2} + \tan\frac{A}{2}\tan\frac{B}{2} = 1. \blacksquare$$

Bài 8. Cho ΔABC có $\cot\dfrac{A}{2}$; $\cot\dfrac{B}{2}$ và $\cot\dfrac{C}{2}$ theo thứ tự tạo 1 cấp số cộng. Chứng minh: $\cot\dfrac{A}{2}.\cot\dfrac{C}{2} = 3$

Giải

Ta có: $\div \cot\dfrac{A}{2}, \cot\dfrac{B}{2}, \cot\dfrac{C}{2}$

$$\Leftrightarrow \cot\frac{A}{2} + \cot\frac{C}{2} = 2\cot\frac{B}{2} \Leftrightarrow \frac{\sin\dfrac{A+C}{2}}{\sin\dfrac{A}{2}\sin\dfrac{C}{2}} = \frac{2\cos\dfrac{B}{2}}{\sin\dfrac{B}{2}}$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{\sin\dfrac{A}{2}\sin\dfrac{C}{2}} = \frac{2}{\sin\dfrac{B}{2}} \text{ (do } \sin\frac{A+C}{2} = \cos\frac{B}{2} > 0)$$

$$\Leftrightarrow \frac{\cos\left(\dfrac{A+C}{2}\right)}{\sin\dfrac{A}{2}\sin\dfrac{C}{2}} = 2 \Leftrightarrow \frac{\cos\dfrac{A}{2}\cos\dfrac{C}{2} - \sin\dfrac{A}{2}\sin\dfrac{C}{2}}{\sin\dfrac{A}{2}.\sin\dfrac{C}{2}} = 2$$

$$\Leftrightarrow \cot\frac{A}{2}\cot\frac{C}{2} - 1 = 2 \Leftrightarrow \cot\frac{A}{2}\cot\frac{C}{2} = 3. \blacksquare$$

Bài 9. Chứng minh: $16\sin10^o.\sin30^o.\sin50^o.\sin70^o = 1$

Giải

Ta có: $A = \dfrac{A\cos10^0}{\cos10^0} = \dfrac{1}{\cos10^0}(16\sin10^0\cos10^0)\sin30^0.\sin50^0.\sin70^0$

$$\Leftrightarrow A = \frac{1}{\cos10^0}\left(8\sin20^0\right)\left(\frac{1}{2}\right)\cos40^0.\cos20^0$$

$$\Leftrightarrow A = \frac{1}{\cos 10^0}\left(4\sin 20^0 \cos 20^0\right).\cos 40^0$$

$$\Leftrightarrow A = \frac{1}{\cos 10^0}\left(2\sin 40^0\right)\cos 40^0$$

$$\Leftrightarrow A = \frac{1}{\cos 10^0}\sin 80^0 = \frac{\cos 10^0}{\cos 10^0} = 1. \blacksquare$$

Bài 10. Chứng minh:

$$A = \sin^4\frac{\pi}{16} + \sin^4\frac{3\pi}{16} + \sin^4\frac{5\pi}{16} + \sin^4\frac{7\pi}{16} + \sin^4\frac{7\pi}{16} = \frac{3}{2}$$

Giải

Ta có: $\sin\frac{7\pi}{16} = \sin\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{16}\right) = \cos\frac{\pi}{16}$

$\sin\frac{5\pi}{16} = \cos\left(\frac{\pi}{2} - \frac{5\pi}{16}\right) = \cos\frac{3\pi}{16}$

Mặt khác: $\sin^4\alpha + \cos^4\alpha = \left(\sin^2\alpha + \cos^2\alpha\right)^2 - 2\sin^2\alpha\cos^2\alpha$

$$= 1 - 2\sin^2\alpha\cos^2\alpha = 1 - \frac{1}{2}\sin^2 2\alpha$$

Do đó: $A = \sin^4\frac{\pi}{16} + \sin^4\frac{7\pi}{16} + \sin^4\frac{3\pi}{16} + \sin^4\frac{5\pi}{16}$

$$= \left(\sin^4\frac{\pi}{16} + \cos^4\frac{\pi}{16}\right) + \left(\sin^4\frac{3\pi}{16} + \cos^4\frac{3\pi}{16}\right)$$

$$= \left(1 - \frac{1}{2}\sin^2\frac{\pi}{8}\right) + \left(1 - \frac{1}{2}\sin^2\frac{3\pi}{8}\right) = 2 - \frac{1}{2}\left(\sin^2\frac{\pi}{8} + \sin^2\frac{3\pi}{8}\right)$$

$$= 2 - \frac{1}{2}\left(\sin^2\frac{\pi}{8} + \cos^2\frac{\pi}{8}\right) \quad \left(\text{do } \sin\frac{3\pi}{8} = \cos\frac{\pi}{8}\right)$$

$$= 2 - \frac{1}{2} = \frac{3}{2}. \blacksquare$$

Bài 11. Chứng minh: $8 + 4\tan\frac{\pi}{8} + 2\tan\frac{\pi}{16} + \tan\frac{\pi}{32} = \cot\frac{\pi}{32}$ (*)

Giải

Ta có: (*) $\Leftrightarrow 8 = \cot\frac{\pi}{32} - \tan\frac{\pi}{32} - 2\tan\frac{\pi}{16} - 4\tan\frac{\pi}{8}$

Mà: $\text{cotga} - \text{tga} = \dfrac{\cos a}{\sin a} - \dfrac{\sin a}{\cos a} = \dfrac{\cos^2 a - \sin^2 a}{\sin a\cos a} = \dfrac{\cos 2a}{\frac{1}{2}\sin 2a} = 2\cot 2a$

Do đó: (*) $\Leftrightarrow \left[\cot\dfrac{\pi}{32} - \tan\dfrac{\pi}{32}\right] - 2\tan\dfrac{\pi}{16} - 4\tan\dfrac{\pi}{8} = 8$

$\Leftrightarrow \left[2\cot\dfrac{\pi}{16} - 2\tan\dfrac{\pi}{16}\right] - 4\tan\dfrac{\pi}{8} = 8$

$\Leftrightarrow 4\cot\dfrac{\pi}{8} - 4\tan\dfrac{\pi}{8} = 8 \Leftrightarrow 8\cot\dfrac{\pi}{4} = 8$ (hiển nhiên đúng). ■

Bài 12. Chứng minh:

a) $\sin^4 x + \cos^4 x = \dfrac{1}{4}(3 + \cos 4x)$

b) $\sin^6 x + \cos^6 x = \dfrac{1}{8}(5 + 3\cos 4x)$

c) $\sin^8 x + \cos^8 x = \dfrac{1}{64}(35 + 28\cos 4x + \cos 8x)$

Giải

a) Ta có: $\sin^4 x + \cos^4 x = \left(\sin^2 x + \cos^2 x\right)^2 - 2\sin^2 x\cos^2 x$

$= 1 - \dfrac{2}{4}\sin^2 2x = 1 - \dfrac{1}{4}(1 - \cos 4x) = \dfrac{3}{4} + \dfrac{1}{4}\cos 4x$

b) Ta có: $\sin^6 x + \cos^6 x = \left(\sin^2 x + \cos^2 x\right)\left(\sin^4 x - \sin^2 x\cos^2 x + \cos^4 x\right)$

$= \left(\sin^4 x + \cos^4 x\right) - \dfrac{1}{4}\sin^2 2x$

$= \left(\dfrac{3}{4} + \dfrac{1}{4}\cos 4x\right) - \dfrac{1}{8}(1 - \cos 4x)$ (do kết quả câu a)

$= \dfrac{3}{8}\cos 4x + \dfrac{5}{8}$

c) Ta có: $\sin^8 x + \cos^8 x = \left(\sin^4 x + \cos^4 x\right)^2 - 2\sin^4 x\cos^4 x$

$= \dfrac{1}{16}(3 + \cos 4x)^2 - \dfrac{2}{16}\sin^4 2x$

$= \dfrac{1}{16}(9 + 6\cos 4x + \cos^2 4x) - \dfrac{1}{8}\left[\dfrac{1}{2}(1 - \cos 4x)\right]^2$

$$= \frac{9}{16} + \frac{3}{8}\cos 4x + \frac{1}{32}(1 + \cos 8x) - \frac{1}{32}\left(1 - 2\cos 4x + \cos^2 4x\right)$$

$$= \frac{9}{16} + \frac{3}{8}\cos 4x + \frac{1}{32}\cos 8x + \frac{1}{16}\cos 4x - \frac{1}{64}(1 + \cos 8x)$$

$$= \frac{35}{64} + \frac{7}{16}\cos 4x + \frac{1}{64}\cos 8x\ .\ \blacksquare$$

Bài 13. Chứng minh: $\sin 3x.\sin^3 x + \cos 3x.\cos^3 x = \cos^3 2x$

Giải

Cách 1:

Ta có: $\sin 3x.\sin^3 x + \cos 3x.\cos^3 x$

$$= \left(3\sin x - 4\sin^3 x\right)\sin^3 x + \left(4\cos^3 x - 3\cos x\right)\cos^3 x$$

$$= 3\sin^4 x - 4\sin^6 x + 4\cos^6 x - 3\cos^4 x$$

$$= 3\left(\sin^4 x - \cos^4 x\right) - 4\left(\sin^6 x - \cos^6 x\right)$$

$$= 3\left(\sin^2 x - \cos^2 x\right)\left(\sin^2 x + \cos^2 x\right)$$

$$-4\left(\sin^2 x - \cos^2 x\right)\left(\sin^4 x + \sin^2 x\cos^2 x + \cos^4 x\right)$$

$$= -3\cos 2x + 4\cos 2x\left[1 - \sin^2 x\cos^2 x\right]$$

$$= -3\cos 2x + 4\cos 2x\left(1 - \frac{1}{4}\sin^2 2x\right)$$

$$= \cos 2x\left[-3 + 4\left(1 - \frac{1}{4}\sin^2 2x\right)\right] = \cos 2x\left(1 - \sin^2 2x\right) = \cos^3 2x$$

Cách 2:

Ta có: $\sin 3x.\sin^3 x + \cos 3x.\cos^3 x$

$$= \sin 3x\left(\frac{3\sin x - \sin 3x}{4}\right) + \cos 3x\left(\frac{3\cos x + \cos 3x}{4}\right)$$

$$= \frac{3}{4}(\sin 3x\sin x + \cos 3x\cos x) + \frac{1}{4}\left(\cos^2 3x - \sin^2 3x\right)$$

$$= \frac{3}{4}\cos(3x - x) + \frac{1}{4}\cos 6x$$

$$= \frac{1}{4}(3\cos 2x + \cos 3.2x)$$

$$= \frac{1}{4}\left(3\cos 2x + 4\cos^3 2x - 3\cos 2x\right) = c\ s^3 2x.\ \blacksquare$$

ĐẠI HỌC QUỐC GIA HÀ NỘI
TRUNG TÂM THÔNG TIN THƯ VIỆN
LC / 1984

Bài 14. Chứng minh: $8\sin^3 18^0 + 8\sin^2 18^0 = 1$

Giải

Ta có: $\sin 18^0 = \cos 72^0$

$\Leftrightarrow \sin 18^0 = 2\cos^2 36^0 - 1$

$\Leftrightarrow \sin 18^0 = 2(1 - 2\sin^2 18^0)^2 - 1$

$\Leftrightarrow \sin 18^0 = 2(1 - 4\sin^2 18^0 + 4\sin^4 18^0) - 1$

$\Leftrightarrow 8\sin^4 18^0 - 8\sin^2 18^0 - \sin 18^0 + 1 = 0$ (1)

$\Leftrightarrow (\sin 18^0 - 1)(8\sin^3 18^0 + 8\sin^2 18^0 - 1) = 0$

$\Leftrightarrow 8\sin^3 18^0 + 8\sin^2 18^0 - 1 = 0$ (do $0 < \sin 18^0 < 1$)

Cách khác:

- Chia 2 vế của (1) cho $(\sin 18^0 - 1)$ ta có

(1) $\Leftrightarrow 8\sin^2 18^0 (\sin 18^0 + 1) - 1 = 0$. ■

Bài 15. Chứng minh

a) $\sin 20^0 + 2\sin 40^0 - \sin 100^0 = \sin 40^0$

b) $\dfrac{\sin(45^0 + \alpha) - \cos(45^0 + \alpha)}{\sin(45^0 + \alpha) + \cos(45^0 + \alpha)} = \tan\alpha$

c) $\dfrac{3\cot^2 15^0 - 1}{3 - \cot^2 15^0} = -(2 + \sqrt{3})$

d) $\sin 200^0 . \sin 310^0 \quad \cos 340^0 . \cos 50^0 = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$

Giải

a) $\sin 20^0 + 2\sin 40^0 - \sin 100^0 = \sin 20^0 - \sin 100^0 + 2\sin 40^0$

$= 2\cos 60^0 \sin(-40^0) + 2\sin 40^0$

$= -2\left(\dfrac{1}{2}\right)\sin 40^0 + 2\sin 40^0 = \sin 40^0$

b) $\dfrac{\sin(45^0 + \alpha) - \cos(45^0 + \alpha)}{\sin(45^0 + \alpha) + \cos(45^0 + \alpha)} = \dfrac{\sin(45^0 + \alpha) - \sin(45^0 - \alpha)}{\sin(45^0 + \alpha) + \sin(45^0 - \alpha)}$

$= \dfrac{2\cos 45^0 \sin\alpha}{2\sin 45^0 . \cos\alpha} = \tan\alpha$

c) $$\frac{3\cot^2 15^0 - 1}{3 - \cot^2 15^0} = \frac{3\left(\frac{1}{\sin^2 15^0} - 1\right) - 1}{3 - \left(\frac{1}{\sin^2 15^0} - 1\right)} = \frac{\frac{3}{\sin^2 15} - 4}{4 - \frac{1}{\sin^2 15}}$$

$$= \frac{3 - 4\sin^2 15}{4\sin^2 15^0 - 1} = \frac{3 - 2(1 - \cos 30^0)}{2(1 - \cos 30^0) - 1} = \frac{1 + 2\cos 30^0}{1 - 2\cos 30^0}$$

$$= \frac{1 + \sqrt{3}}{1 - \sqrt{3}} = \frac{(1 + \sqrt{3})^2}{-2} = -(2 + \sqrt{3})$$

d) $\sin 200^0.\sin 310^0 + \cos 340^0.\cos 50^0$

$= \sin(180^0 + 20^0)\sin(360^0 - 50^0) + \cos(360^0 - 20^0)\cos 50^0$

$= -\sin 20^0 \sin(-50^0) + \cos(-20^0)\cos 50^0$

$= \sin 20^0 \sin 50^0 + \cos(20^0)\cos 50^0$

$= \cos(50^0 - 20^0) = \frac{\sqrt{3}}{2}$. ■

Bài 16. Chứng minh:

a) $\cos^2 x + \cos^2\left(\frac{2\pi}{3} + x\right) + \cos^2\left(\frac{2\pi}{3} - x\right) = \frac{3}{2}$

b) $\frac{1}{\sin 2x} + \frac{1}{\sin 4x} + \frac{1}{\sin 8x} + \frac{1}{\sin 16x} = \cot x - \cot 16x$

Giải

a) Ta có: $\cos^2 x + \cos^2\left(\frac{2\pi}{3} + x\right) + \cos^2\left(\frac{2\pi}{3} - x\right)$

$$= \frac{1}{2}(1 + \cos 2x) + \frac{1}{2}\left[1 + \cos\left(2x + \frac{4\pi}{3}\right)\right] + \frac{1}{2}\left[1 + \cos\left(\frac{4\pi}{3} - 2x\right)\right]$$

$$= \frac{3}{2} + \frac{1}{2}\left[\cos 2x + \cos\left(2x + \frac{4\pi}{3}\right) + \cos\left(\frac{4\pi}{3} - 2x\right)\right]$$

$$= \frac{3}{2} + \frac{1}{2}\left[\cos 2 \;\; + 2\cos 2x \cos\frac{4\pi}{3}\right]$$

$$= \frac{3}{2} + \frac{1}{2}\left[\cos 2x + 2\cos 2x\left(-\frac{1}{2}\right)\right] = \frac{3}{2}$$

b) Ta có: $\cot a - \cot b = \frac{\cos a}{\sin a} - \frac{\cos b}{\sin b} = \frac{\sin b\cos a - \sin a\cos b}{\sin a\sin b}$

$$= \frac{\sin(b - a)}{\sin a \sin b}$$

$$\text{Do đó: } \cot x - \cot 2x = \frac{\sin(2x - x)}{\sin x \sin 2x} = \frac{1}{\sin 2x} \qquad (1)$$

$$\cot 2x - \cot 4x = \frac{\sin(4x - 2x)}{\sin 2x \sin 4x} = \frac{1}{\sin 4x} \qquad (2)$$

$$\cot 4x - \cot 8x = \frac{\sin(8x - 4x)}{\sin 4x \sin 8x} = \frac{1}{\sin 8x} \qquad (3)$$

$$\cot 8x - \cot 16x = \frac{\sin(16x - 8x)}{\sin 16x \sin 8x} = \frac{1}{\sin 16x} \qquad (4)$$

Lấy (1) + (2) + (3) + (4) ta được

$$\cot x - \cot 16x = \frac{1}{\sin 2x} + \frac{1}{\sin 4x} + \frac{1}{\sin 8x} + \frac{1}{\sin 16x}. \blacksquare$$

Bài 17. Tính $P = \sin^2 50^0 + \sin^2 70 - \cos 50^0 \cos 70^0$

Giải

Ta có: $P = \frac{1}{2}\left(1 - \cos 100^0\right) + \frac{1}{2}\left(1 - \cos 140^0\right) - \frac{1}{2}\left(\cos 120^0 + \cos 20^0\right)$

$$P = 1 - \frac{1}{2}\left(\cos 100^0 + \cos 140^0\right) - \frac{1}{2}\left(-\frac{1}{2} + \cos 20^0\right)$$

$$P = 1 - \left(\cos 120^0 \cos 20^0\right) + \frac{1}{4} - \frac{1}{2}\cos 20^0$$

$$P = \frac{5}{4} + \frac{1}{2}\cos 20^0 - \frac{1}{2}\cos 20^0 = \frac{5}{4}. \blacksquare$$

Bài 18. Chứng minh:

a) $\tan 30^0 + \tan 40^0 + \tan 50^0 + \tan 60^0 = \frac{8\sqrt{3}}{3}\cos 20^0$

b) $\cos 12^0 + \cos 18^0 - 4\cos 15^0.\cos 21^0 \cos 24^0 = -\frac{\sqrt{3} + 1}{2}$

Giải

a) Áp dụng: $\tan a + \tan b = \frac{\sin(a + b)}{\cos a \cos b}$

Ta có: $\left(\tan 50^0 + \tan 40^0\right) + \left(\tan 30^0 + \tan 60^0\right)$

$$= \frac{\sin 90^0}{\cos 50^0 \cos 40^0} + \frac{\sin 90^0}{\cos 30^0 \cos 60^0} = \frac{1}{\sin 40^0 \cos 40^0} + \frac{1}{\frac{1}{2}\cos 30^0}$$

$$= \frac{2}{\sin 80^0} + \frac{2}{\cos 30^0} = 2\left(\frac{1}{\cos 10^0} + \frac{1}{\cos 30^0}\right)$$

$$= 2\left(\frac{\cos 30^0 + \cos 10^0}{\cos 10^0 \cos 30^0}\right) = 4\frac{\cos 20^0 \cos 10^0}{\cos 10^0 \cos 30^0} = \frac{8\sqrt{3}}{3}\cos 20^0$$

b) Ta có: $\cos 12^0 + \cos 18^0 - 4\cos 15^0(\cos 21^0 \cos 24^0)$

$$= 2\cos 15^0 \cos 3^0 - 2\cos 15^0(\cos 45^0 + \cos 3^0)$$

$$= 2\cos 15^0 \cos 3^0 - 2\cos 15^0 \cos 45^0 - 2\cos 15^0 \cos 3^0$$

$$= -2\cos 15^0 \cos 45^0 = -(\cos 60^0 + \cos 30^0) = \frac{\sqrt{3}+1}{2}. \blacksquare$$

Bài 19. Tính giá trị các biểu thức

a) $A = \dfrac{1}{\sin 10^0} - 4\sin 70^0$

b) $B = \dfrac{\sin 20^0.\sin 30^0.\sin 40^0.\sin 50^0.\sin 60^0.\sin 70^0}{\cos 10^0.\cos 50^0}$

Giải

a) $A = \dfrac{1}{\sin 10^0} - 4\sin 70^0 = \dfrac{1 - 4\sin 10^0.\cos 20^0}{\sin 10^0}$

$$A = \frac{1 - 2(\sin 30^0 - \sin 10^0)}{\sin 10^0} = \frac{1 - 2\left(\frac{1}{2}\right) + 2\sin 10^0}{\sin 10^0} = 2$$

b) $$B = \frac{\sin 20^0 \times \frac{1}{2} \times \cos 50^0 \times \cos 40^0 \times \frac{\sqrt{3}}{2} \times \cos 20^0}{\cos 10^0.\cos 50^0}$$

$$B = \frac{\frac{\sqrt{3}}{4}\sin 20^0 \times \cos 20^0 \times \cos 40^0}{\cos 10^0}$$

$$B = \frac{\sqrt{3}}{8}.\frac{\sin 40^0.\cos 40^0}{\cos 10^0} = \frac{\sqrt{3}}{16}.\frac{\sin 80^0}{\sin 80^0} = \frac{\sqrt{3}}{16}. \blacksquare$$

Bài 20. Cho ΔABC, Chứng minh:

a) $\sin A + \sin B + \sin C = 4\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}$

b) $\cos A + \cos B + \cos C = 1 + 4\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}$

c) $\sin 2A + \sin 2B + \sin 2C = 4\sin A \sin B \sin C$

d) $\cos^2A + \cos^2B + \cos^2C = -2\cos A\cos B\cos C$

e) $\cot A.\cot B + \cot B.\cot C + \cot C.\cot A = 1$

f) $\cot\frac{A}{2} + \cot\frac{B}{2} + \cot\frac{C}{2} = \cot\frac{A}{2}.\cot\frac{B}{2}.\cot\frac{C}{2}$

g) $\cos2A + \cos2B + \cos2C + 4\cos A\cos B\cos C + 1 = 0$

Giải

a) Ta có: $\sin A + \sin B + \sin C = 2\sin\frac{A+B}{2}\cos\frac{A-B}{2} + \sin(A+B)$

$$= 2\sin\frac{A+B}{2}\left(\cos\frac{A-B}{2} + \cos\frac{A+B}{2}\right)$$

$$= 4\cos\frac{C}{2}\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}\ \left(\text{do}\ \frac{A+B}{2} = \frac{\pi}{2} - \frac{C}{2}\right)$$

b) Ta có: $\cos A + \cos B + \cos C = 2\cos\frac{A+B}{2}\cos\frac{A-B}{2} - \cos(A+B)$

$$= 2\cos\frac{A+B}{2}\cos\frac{A-B}{2} - \left(2\cos^2\frac{A+B}{2} - 1\right)$$

$$= 2\cos\frac{A+B}{2}\left[\cos\frac{A-B}{2} - \cos\frac{A+B}{2}\right] + 1$$

$$= -4\cos\frac{A+B}{2}\sin\frac{A}{2}\sin\left(-\frac{B}{2}\right) + 1 = 4\sin\frac{C}{2}\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2} + 1$$

c) $\sin2A + \sin2B + \sin2C = 2\sin(A+B)\cos(A-B) + 2\sin C\cos C$

$$= 2\sin C\cos(A-B) + 2\sin C\cos C$$

$$= 2\sin C[\cos(A-B) - \cos(A+B)]$$

$$= -4\sin C\sin A\sin(-B) = 4\sin C\sin A\sin B$$

d) $\cos^2A + \cos^2B + \cos^2C = 1 + \frac{1}{2}(\cos2A + \cos2B) + \cos^2C$

$$= 1 + \cos(A+B)\cos(A-B) + \cos^2C$$

$$= 1 - \cos C[\cos(A-B) - \cos C]\ \text{do}\ (\cos(A+B) = -\cos C)$$

$$= 1 - \cos C[\cos(A-B) + \cos(A+B)] = 1 - 2\cos C.\cos A.\cos B$$

e) Ta có: $\cot(A+B) = -\cot C$

$$\Leftrightarrow \frac{1 - \tan A\tan B}{\tan A + \tan B} = -\cot C$$

$$\Leftrightarrow \frac{\cot A\cot B - 1}{\cot B + \cot A} = -\cot C$$ (nhân tử và mẫu với cotA.cotB)

$$\Leftrightarrow \cot A\cot B - 1 = -\cot C\cot B - \cot A\cot C$$

$$\Leftrightarrow \cot A\cot B + \cot B\cot C + \cot A\cot C = 1$$

f) Ta có: $\tan\frac{A+B}{2} = \cot\frac{C}{2} \Leftrightarrow \dfrac{\tan\frac{A}{2} + \tan\frac{B}{2}}{1 - \tan\frac{A}{2}\tan\frac{B}{2}} = \cot\frac{C}{2}$

$\Leftrightarrow \dfrac{\cot\frac{A}{2} + \cot\frac{B}{2}}{\cot\frac{A}{2}.\cot\frac{B}{2} - 1} = \cot\frac{C}{2}$ (nhân tử và mẫu với $\cot\frac{A}{2}.\cot\frac{B}{2}$)

$$\Leftrightarrow \cot\frac{A}{2} + \cot\frac{B}{2} = \cot\frac{A}{2}\cot\frac{B}{2}\cot\frac{C}{2} - \cot\frac{C}{2}$$

$$\Leftrightarrow \cot\frac{A}{2} + \cot\frac{B}{2} + \cot\frac{C}{2} = \cot\frac{A}{2}.\cot\frac{B}{2}.\cot\frac{C}{2}$$

g) Ta có: $(\cos 2A + \cos 2B) + (\cos 2C + 1)$

$$= 2\cos(A + B)\cos(A - B) + 2\cos^2 C$$

$$= -2\cos C\cos(A - B) + 2\cos^2 C$$

$$= -2\cos C[\cos(A - B) + \cos(A + B)] = -4\cos A\cos B\cos C$$

Do đó: $\cos 2A + \cos 2B + \cos 2C + 1 + 4\cos A\cos B\cos C = 0$. ■

Bài 21. Cho ΔABC. Chứng minh:

$$\cos 3A + \cos 3B + \cos 3C = 1 - 4\sin\frac{3A}{2}\sin\frac{3B}{2}\sin\frac{3C}{2}$$

Giải

Ta có: $(\cos 3A + \cos 3B) + \cos 3C$

$$= 2\cos\frac{3}{2}(A + B)\cos\frac{3}{2}(A - B) + 1 - 2\sin^2\frac{3C}{2}$$

Mà: $A + B = \pi - C$ nên $\frac{3}{2}(A + B) = \frac{3}{2}\pi - \frac{3C}{2}$

$$\Rightarrow \cos\frac{3}{2}(A + B) = \cos\left(\frac{3\pi}{2} - \frac{3C}{2}\right) = -\cos\left(\frac{\pi}{2} - \frac{3C}{2}\right) = -\sin\frac{3C}{2}$$

Do đó: cos3A + cos3B + cos3C

$$= -2\sin\frac{3C}{2}\cos\frac{3(A-B)}{2} - 2\sin^2\frac{3C}{2} + 1$$

$$= -2\sin\frac{3C}{2}\left[\cos\frac{3(A-B)}{2} + \sin\frac{3C}{2}\right] + 1$$

$$= -2\sin\frac{3C}{2}\left[\cos\frac{3(A-B)}{2} - \cos\frac{3}{2}(A+B)\right] + 1$$

$$= 4\sin\frac{3C}{2}\sin\frac{3A}{2}\sin\left(\frac{-3B}{2}\right) + 1 = -4\sin\frac{3C}{2}\sin\frac{3A}{2}\sin\frac{3B}{2} + 1. \blacksquare$$

Bài 22. A, B, C là ba góc của một tam giác. Chứng minh:

$$\frac{\sin A + \sin B - \sin C}{\cos A + \cos B - \cos C + 1} = \tan\frac{A}{2}\tan\frac{B}{2}\cot\frac{C}{2}$$

Giải

Ta có: $$\frac{\sin A + \sin B - \sin C}{\cos A + \cos B - \cos C + 1} = \frac{2\sin\frac{A+B}{2}\cos\frac{A-B}{2} - 2\sin\frac{C}{2}\cos\frac{C}{2}}{2\cos\frac{A+B}{2}\cos\frac{A-B}{2} + 2\sin^2\frac{C}{2}}$$

$$= \frac{2\cos\frac{C}{2}\left[\cos\frac{A-B}{2} - \sin\frac{C}{2}\right]}{2\sin\frac{C}{2}\left[\cos\frac{A-B}{2} + \sin\frac{C}{2}\right]} = \cot\frac{C}{2}.\frac{\cos\frac{A-B}{2} - \cos\frac{A+B}{2}}{\cos\frac{A-B}{2} + \cos\frac{A+B}{2}}$$

$$= \cot\frac{C}{2}.\frac{-2\sin\frac{A}{2}.\sin\left(-\frac{B}{2}\right)}{2\cos\frac{A}{2}.\cos\frac{B}{2}} = \cot\frac{C}{2}.\tan\frac{A}{2}.\tan\frac{B}{2}. \blacksquare$$

Bài 23. Cho ΔABC tùy ý với ba góc đều là nhọn.

Tìm giá trị nhỏ nhất của P = tanA.tanB.tanC

Giải

Ta có: A + B = π − C

Nên: $\tan(A + B) = -\tan C \Leftrightarrow \dfrac{\tan A + \tan B}{1 - \tan A.\tan B} = -\tan C$

$\Leftrightarrow \tan A + \tan B = -\tan C + \tan A.\tan B.\tan C$

Vậy: $P = \tan A.\tan B.\tan C = \tan A + \tan B + \tan C$

Áp dụng bất đẳng thức Cauchy cho ba số dương tanA, tanB, tanC ta được $\tan A + \tan B + \tan C \geq 3\sqrt[3]{\tan A.\tan B.\tan C}$

$$\Leftrightarrow P \geq 3\sqrt[3]{P} \quad \Leftrightarrow \sqrt[3]{P^2} \geq 3 \quad \Leftrightarrow P \geq 3\sqrt{3}$$

Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow \begin{cases} \tan A = \tan B = \tan C \\ 0 < A, B, C < \dfrac{\pi}{2} \end{cases} \Rightarrow A = B = C = \dfrac{\pi}{3}$

Do đó: $\text{Min}P = 3\sqrt{3} \Leftrightarrow A = B = C = \dfrac{\pi}{3}$. ■

Bài 24. Tìm giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của

a) $y = 2\sin^8 x + \cos^4 2x$ b) $y = \sqrt[4]{\sin x} - \sqrt{\cos x}$

Giải

a) Ta có: $y = 2\left(\dfrac{1-\cos 2x}{2}\right)^4 + \cos^4 2x$

Đặt $t = \cos 2x$ với $-1 \leq t \leq 1$ thì

$$y = \frac{1}{8}(1-t)^4 + t^4 \Rightarrow y' = -\frac{1}{2}(1-t)^3 + 4t^3$$

Ta có: $y' = 0 \Leftrightarrow (1-t)^3 = 8t^3 \Leftrightarrow 1 - t = 2t \Leftrightarrow t = \dfrac{1}{3}$

Ta có $y(1) = 1$; $y(-1) = 3$; $y\left(\dfrac{1}{3}\right) = \dfrac{1}{27}$

Do đó: $\underset{x\in \mathbb{R}}{\text{Max}}(y) = 3$ và $\underset{x\in \mathbb{R}}{\text{Min}}(y) = \dfrac{1}{27}$

b) Do điều kiện: $\sin x \geq 0$ và $\cos x \geq 0$ nên miền xác định

$$D = \left[k2\pi, \frac{\pi}{2} + k2\pi\right] \text{ với } k \in \mathbb{Z}$$

Đặt $t = \sqrt{\cos x}$ với $0 \leq t \leq 1$ thì $t^4 = \cos^2 x = 1 - \sin^2 x$

Nên $\sin x = \sqrt{1-t^4}$

Vậy $y = \sqrt[8]{1-t^4} - t$ trên $D' = [0\ 1]$

Thì $y' = \dfrac{-t^3}{2.\sqrt[8]{\left(1-t^4\right)^7}} - 1 < 0 \ \forall t \in [0; 1)$

Nên y giảm trên [0, 1].

Vậy: $\underset{x\in D}{\max}(y) = y(0) = 1$, $\underset{x\in D}{\min}(y) = y(1) = -1$. ■

BÀI TẬP TỰ GIẢI

1. Chứng minh:

a) $\tan x.\tan\left[\frac{\pi}{3}-x\right].\tan\left[\frac{\pi}{3}+x\right]=\tan 3x$

b) $\tan 20^0+\tan 40^0+\sqrt{3}\tan 20^0.\tan 40^0=\sqrt{3}$

c) $\sin 20^0.\sin 40^0.\sin 80^0=\frac{\sqrt{3}}{8}$

d) $\tan 5^0.\tan 55^0.\tan 65^0.\tan 75^0=1$

e) $\frac{\sqrt{3}}{2}\sin a\left(\cot\frac{a}{2}-\tan\frac{a}{2}\right)=\sin(a+60^0)+\cos(a+30^0)$

2. Chứng minh rằng nếu $\begin{cases}\sin x=2\sin(x+y)\\ x+y\neq(2k+1)\frac{\pi}{2}(k\in z)\end{cases}$

thì $\tan(x+y)=\frac{\sin y}{\cos y-2}$

3. Cho ΔABC có 3 góc đều nhọn và $A\geq B\geq C$

a) Chứng minh: $\tan A+\tan B+\tan C=\tan A.\tan B.\tan C$

b) Đặt $\tan A.\tan B=p$; $\tan A.\tan C=q$. Chứng minh $(p-1)(q-1)\geq 4$

4. Chứng minh các biểu thức sau không phụ thuộc x:

a) $A=\sin^4x(1+\sin^2x)+\cos^4x(1+\cos^2x)+5\sin^2x\cos^2x+1$

b) $B=3(\sin^8x-\cos^8x)+4(\cos^6x-2\sin^6x)+6\sin^4x$

c) $C=\cos^2(x-a)+\sin^2(x-b)-2\cos(x-a)\sin(x-b)\sin(a-b)$

5. Cho x, y, z thỏa $x+y+z=n\pi$ $(n\in Z)$

Chứng minh: $\cos^2x+\cos^2y+\cos^2z=1+(-1)^n2\cos x\cos y\cos z$

6. Rút gọn:

a) $A=\sqrt{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\cos x}}}$ với $x\in(0,\frac{\pi}{2})$

b) $B=\sin^3\frac{x}{3}+3\cos^3\frac{x}{9}+9\sin^3\frac{x}{27}$

7. Cho ΔABC, chứng minh:

a) $\cot B + \dfrac{\cos C}{\sin B\cos A} = \cot gC + \dfrac{\cos B}{\sin C\cos A}$

b) $\sin^3 A + \sin^3 B + \sin^3 C = 3\cos\dfrac{A}{2}\cos\dfrac{B}{2}\cos\dfrac{C}{2} + \cos\dfrac{3A}{2}\cos\dfrac{3B}{2}\cos\dfrac{3C}{2}$

c) $\sin A + \sin B + \sin C = \cos\dfrac{A}{2}.\cos\dfrac{B-C}{2} + \cos\dfrac{B}{2}.\cos\dfrac{A-C}{2} + \cos\dfrac{C}{2}.\cos\dfrac{A-B}{2}$

d) $\cot A\cot B + \cot B\cot C + \cot C\cot A = 1$

e) $\cos^2 A + \cos^2 B + \cos^2 C = 1 - 2\cos A\cos B\cos C$

f) $\sin 3A\sin(B - C) + \sin 3B\sin(C - A) + \sin 3C\sin(A - B) = 0$

8. Tìm giá trị nhỏ nhất của:

a) $y = \dfrac{1}{\sin x} + \dfrac{1}{\cos x}$ với $0 < x < \dfrac{\pi}{2}$

b) $y = 4x + \dfrac{9\pi}{x} + \sin x$ với $0 < x < \infty$

c) $y = 2\sin^2 x + 4\sin x\cos x + \sqrt{5}$

9. Tìm giá trị lớn nhất của:

a) $y = \sin x\sqrt{\cos x} + \cos x\sqrt{\sin x}$

b) $y = \sin x + 3\sin 2x$

c) $y = \cos x + \sqrt{2 - \cos^2 x}$

74 CÂU HỎI TRẮC NGHIỆM CÔNG THỨC LƯỢNG GIÁC

Chủ đề 1. HÀM SỐ LƯỢNG GIÁC

1. Kết luận nào sau đây là sai?

(A) $y = \sin x$ giảm trên $(\dfrac{\pi}{2}, \pi)$ (B) $y = \cos x$ giảm trên $(0, \pi)$

(C) $y = \tan x$ tăng trên $(-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2})$ (D) $y = \cot x$ tăng trên $(0, \pi)$

2. Trên miền $T = [0, 2\pi]$ hàm số $y = \sqrt{\cos x}$ xác định khi và chỉ khi:

(A) $x \in [0, \dfrac{\pi}{2}]$ (B) $x \in [0, \dfrac{\pi}{2}] \cup [\dfrac{3\pi}{2}, 2\pi]$

(C) $x \in [-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}]$ (D) $x \in [\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{3\pi}{2}]$.

3. Kết luận nào sau đây là sai

(A) $y = \sin\left(\frac{\pi}{3} + \frac{k2\pi}{3}\right) \in \{0, -\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\}$

(B) $y = \cos\left(\frac{\pi}{3} + \frac{k2\pi}{3}\right) \in \{-1. \frac{1}{2}\}$

(C) $y = \tan\left(\frac{\pi}{6} + \frac{k\pi}{3}\right) \in \{-\frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{\sqrt{3}}{3}, 1\}$

(D) $y = \cot\left(\frac{\pi}{4} + \frac{k\pi}{2}\right) \in \{-1, 1\}$

4. Kết luận nào sau đây là đúng?

(A) $y = \sin x \sin 2x$ là hàm số lẻ (B) $y = x + \cos x$ là hàm số chẵn

(C) $y = \cos x \cos 3x$ là hàm số lẻ (D) $y = x^3 + \sin x$ là hàm số lẻ

5. Giá trị nhỏ nhất và lớn nhất của $y = -2\cos x + 3$ là:

(A) 0 và 5 (B) 1 và 3 (C) 1 và 5 (D) Không tồn tại

6. Hàm số $y = \tan\left(\frac{x}{2} - \frac{\pi}{3}\right)$ xác định khi và chỉ khi

(A) $x \neq \frac{4\pi}{3} + k2\pi$ (B) $x \neq \frac{5\pi}{3} + k\pi$

(C) $x \neq \frac{5\pi}{3} + k2\pi$ (D) $x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$

7. Hàm số $y = \cot(2x - \pi)$ xác định khi và chỉ khi

(A) $x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$ (B) $x \neq \frac{\pi}{2} + \frac{k\pi}{2}$

(C) $x \neq \pi + k\pi$ (D) $x \neq \frac{\pi}{4} + \frac{k\pi}{2}$

8. Kết luận nào sau đây là sai?

(A) $y = 3\sin 2x$ tuần hoàn chu kỳ π

(B) $y = -2\cos 3x$ tuần hoàn chu kỳ $\frac{2\pi}{3}$

(C) $y = \tan 4x$ tuần hoàn chu kỳ $\frac{\pi}{4}$

(D) $y = \cot\frac{x}{2}$ tuần hoàn chu kỳ $\frac{\pi}{2}$

9. Hàm số $y = \sin\frac{x}{2} + \cos\frac{2x}{3}$ là hàm số tuần hoàn có chu kỳ

(A) $T = 2\pi$ (B) $T = 6\pi$ (C) $T = 8\pi$ (D) $T = 12\pi$

10. Cho hàm số $y = \tan(2x + \frac{\pi}{3})$. Kết luận nào sau đây là sai

(A) Tập xác định $D = R \setminus \left\{\frac{\pi}{12} + k\frac{\pi}{2}\right\}$

(B) Tập giá trị $T = R$

(C) Hàm số tuần hoàn chu kỳ $T = \pi$

(D) y là hàm số không chẳn, không lẻ.

11. Miền xác định của hàm số $y = \tan x + \cot x$ là

(A) $D = \{x \in R/ x \neq k2\pi\}$ với $k \in Z$

(B) $D = \{x \in R/ x \neq k\pi$ với $k \in Z\}$

(C) $D = \{x \in R/ x \neq k\frac{\pi}{2}$ với $k \in Z\}$

(D) $D = \{x \in R/ x \neq k\frac{\pi}{4}$ với $k \in Z\}$

12. Khi x thay đổi trên nửa khoảng $\left(-\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{3}\right]$ thì $y = \cos x$ lấy mọi giá trị thuộc:

(A) $\left[\frac{1}{2}, 1\right]$ (B) $\left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$ (C) $\left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]$ (D) $\left[-1, \frac{1}{2}\right]$

13. Khi x thay đổi trên $\left(\frac{5\pi}{4}, \frac{7\pi}{4}\right)$ thì $y = \sin x$ lấy mọi giá trị thuộc:

(A) $\left[\frac{\sqrt{2}}{2}, 1\right]$ (B) $\left[-1, -\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ (C) $\left[-\frac{\sqrt{2}}{2}, 0\right]$ (D) $[-1, 1]$

14. Tập giá trị của $y = 2\sin x + 3$ là:

(A) $T = [0, 1]$ (B) $T = [2, 3]$

(C) $T = [-2, 3]$ (D) $T = [1, 5]$

15. Tập giá trị của $y = 1 - 2|\sin 2x|$ là:

(A) $T = [-1, 0]$ (B) $T = [-1, 1]$

(C) $T = [-1, 2]$ (D) $T = [0, 1]$.

Chủ đề 2. HỆ THỨC CƠ BẢN

16. Biết $90^0 < \alpha < 180^0$ và $\cos\alpha = \frac{-1}{5}$ thì $\cot\alpha$ bằng

(A) $2\sqrt{6}$ (B) $-2\sqrt{6}$ (C) $\frac{1}{2\sqrt{6}}$ (D) $-\frac{1}{2\sqrt{6}}$

17. Biết $\pi < \alpha < \frac{3\pi}{2}$ và $\tan\alpha = \frac{3}{4}$ thì $\sin\alpha$ bằng

(A) $\frac{5}{3}$ (B) $\frac{3}{5}$ (C) $-\frac{3}{5}$ (D) $-\frac{5}{3}$

18. $A = 2\cos^4x - \sin^4x + \sin^2x\cos^2x + 3\sin^2x$ không phụ thuộc x và A bằng:

(A) 2 (B) −2 (C) 1 (D) −1

19. $B = \frac{2}{\tan x - 1} + \frac{\cot x + 1}{\cot x - 1}$ không phụ thuộc x và B bằng

(A) 0 (B) 1 (C) −1 (D) 2

20. Rút gọn biểu thức $C = \sin\alpha - \sqrt{\cot^2\alpha - \cos^2\alpha}$ với $\alpha \in (-\pi, 0)$ thì:

(A) $C = -\frac{1}{\sin\alpha}$ (B) $C = \frac{1}{\sin\alpha}$

(C) $C = \tan\alpha$ (D) $C = \cot\alpha$

21. Cho $\cot x = \frac{1}{2}$ thì giá trị của $D = \frac{1}{\sin^2x - \sin x\cos x - \cos^2x}$ bằng:

(A) 5 (B) $\frac{1}{5}$ (C) 4 (D) $\frac{1}{4}$

22. Biết $\tan x = \frac{3}{5}$ thì giá trị của $X = \frac{\sin x\cos x}{\sin^2x - \cos^2x}$ bằng:

(A) $\frac{15}{16}$ (B) $-\frac{15}{16}$ (C) $\frac{3}{5}$ (D) $\frac{13}{16}$

23*. Giá trị lớn nhất của $y = \cos^2x - \sin x$ là:

(A) 2 (B) 0 (C) $\frac{5}{4}$ (D) $\frac{4}{5}$

24. $E = \frac{\cos^2x - \sin^2y}{\sin^2x\sin^2y} - \cot^2x\cot^2y$ không phụ thuộc x, y và E bằng:

(A) 1 (B) − 1 (C) 2 (D) −2

25*. $F = \frac{1}{\sin^6x} - \cot^6x - \frac{3\cot^2x}{\sin^2x}$ không phụ thuộc x và F bằng:

(A) 1 (B) −1 (C) 2 (D) −2

26*. Biết $\cot 15^0 = 2 + \sqrt{3}$ kết luận nào sau đây là sai

(A) $\tan 15^0 = 2 - \sqrt{3}$ (B) $\sin 15^0 = \dfrac{\sqrt{2-\sqrt{3}}}{2}$

(C) $\cos 15^0 = \dfrac{\sqrt{\sqrt{3}+2}}{2\sqrt{2}}$ (D) $\tan^2 15^0 + \cot^2 15^0 = 14$

27. Cho $\tan\alpha + \cot\alpha = 2$ thì $\tan^3\alpha + \cot^3\alpha$ bằng

(A) 2 (B) –2 (C) 4 (D) 8

Chủ đề 3. CUNG LIÊN KẾT

28. Đẳng thức nào sau đây là sai?

(A) $\sin(\pi + \alpha) = -\sin\alpha$ (B) $\cos(\alpha - \dfrac{\pi}{2}) = \sin\alpha$

(C) $\tan(\pi - \alpha) = -\tan\alpha$ (D) $\cot(\dfrac{\pi}{2} + \alpha) = \tan\alpha$

29. Đẳng thức nào sau đây là đúng?

(A) $\cos(-\alpha) = -\cos\alpha$ (B) $\sin(\alpha - \pi) = \sin\alpha$

(C) $\tan(\alpha - \dfrac{\pi}{2}) = -\cot\alpha$ (D) $\cos(\alpha + \pi) = \cos\alpha$

30. Kết luận nào sau đây là sai?

(A) $\sin\dfrac{10\pi}{3} = -\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ (B) $\cos 510^0 = -\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

(C) $\tan\dfrac{35\pi}{4} = 1$ (D) $\cot 585^0 = 1$

31. Giá trị của $B = \cos 325^0 + \sin 235^0 + \tan 205^0.\tan 295^0$ bằng:

(A) 1 (B) –1 (C) 2 (D) –2

32. Giá trị của $C = \dfrac{\sin 234^0 + \cos 216^0}{\sin 144^0 - \cos 126^0}\tan 36^0$ bằng:

(A) 1 (B) –1 (C) 2 (D) –2

33. Kết luận nào sau đây là sai?

(A) $\tan^2\dfrac{15\pi}{4} = 1$ (B) $\sin\dfrac{14\pi}{3} = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$

(C) $\cos\dfrac{25\pi}{6} = -\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ (D) $\dfrac{1}{\sin^2\dfrac{29\pi}{4}} = 2$

34. Kết luận nào sau đây là đúng?

(A) $\cos(-188^0) = \cos8^0$ (B) $\sin278^0 = -\cos8^0$

(C) $\cot368^0 = -\cot8^0$ (D) $\tan98^0 = \cot8^0$

35. Giá trị của $A = \dfrac{(\cot44^0 + \tan226^0)\cos406^0}{\cos316^0}$ bằng:

(A) 2 (B) –2 (C) 1 (D) –1

36. Cho tam giác ABC. Kết luận nào sau đây là sai?

(A) $\sin(A + B) = \sin C$ (B) $\cos(B + C) = -\cos A$

(C) $\tan C = \tan(A + B)$ (D) $\cot\dfrac{A + C}{2} = \tan\dfrac{B}{2}$

37*. Cho ΔABC. Đẳng thức nào sau đây là sai?

(A) $\sin\dfrac{A + B + 3C}{2} = \cos C$ (B) $\cos(A + B - C) = -\cos2C$

(C) $\tan\dfrac{A + B - 2C}{2} = \cot\dfrac{3C}{2}$ (D) $\cot\dfrac{A + B + 2C}{2} = \tan\dfrac{C}{2}$

Chủ đề 4. CÔNG THỨC CỘNG

38. Biết $\tan(x + \alpha) = 2$, $\cot(x - \alpha) = \dfrac{1}{3}$ (α bất kỳ) tan2x bằng:

(A) $x = 1$ (B) $x = -1$ (C) $x = 2$ (D) $x = -2$

39. $\cos15^0$ bằng:

(A) $\dfrac{\sqrt{2}}{4}(\sqrt{3} + 1)$ (B) $\dfrac{\sqrt{2}}{4}(\sqrt{3} - 1)$

(C) $\dfrac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{2}$ (D) $\dfrac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{2}$

40. $\sin105^0$ bằng:

(A) $\dfrac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4}$ (B) $\dfrac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4}$ (C) $\dfrac{\sqrt{2} - \sqrt{6}}{4}$ (D) $\dfrac{-\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4}$

41. Giá trị của $X = \cos(-53^0)\sin(-337^0) + \sin307^0\sin113^0$ bằng:

(A) $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ (B) $-\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ (C) $\dfrac{1}{2}$ (D) $-\dfrac{1}{2}$

42. Kết luận nào sau đây là sai?

(A) $\sin x + \cos x = \frac{\sqrt{2}}{2}\sin(x + \frac{\pi}{4})$ (B) $\sin x - \cos x = \frac{\sqrt{2}}{2}\sin(x - \frac{\pi}{4})$

(C) $\sin x + \cos x = \frac{\sqrt{2}}{2}\cos(\frac{\pi}{4} - x)$ (D) $\sin x - \cos x = \frac{\sqrt{2}}{2}\cos(x + \frac{\pi}{4})$

43. Rút gọn $A = \frac{\cos(a+b)\cos(a-b)}{\sin^2 a \sin^2 b}$ ta được:

(A) $A = 1 - \cot^2 a \tan^2 b$ (B) $A = \cot^2 a \cot^2 b - 1$

(C) $A = 1 - \tan^2 a \tan^2 b$ (D) $A = \tan^2 a \tan^2 b - 1$

44. Biết $\cot\alpha = \frac{3}{4}$ và $\tan\beta = 7$ thì $\alpha + \beta$ bằng:

(A) $\frac{3\pi}{4}$ (B) $\frac{3\pi}{4} + 2\pi$ (C) $-\frac{\pi}{4}$ (D) $-\frac{\pi}{4} + k\pi$

45. Cho A, B, C là 3 góc nhọn có cotA = 2, cotB = 5, cotC = 8 thì A + B + C bằng:

(A) $\frac{\pi}{6}$ (B) $\frac{\pi}{4}$ (C) $\frac{\pi}{3}$ (D) $\frac{\pi}{2}$

46. Giá trị của $X = \sin 15^0 + \tan 30^0.\cos 15^0$ bằng:

(A) $\frac{\sqrt{6}}{2}$ (B) $\frac{\sqrt{6}}{3}$ (C) $\frac{\sqrt{3}}{3}$ (D) $\frac{\sqrt{3}}{6}$

Chủ đề 5. CÔNG THỨC NHÂN ĐÔI – NHÂN BA – HẠ BẬC

47. Cho biết $\sin\alpha + \cos\alpha = \frac{1}{\sqrt{2}}$ kết quả nào sau đây là sai?

(A) $\sin 2\alpha = -\frac{1}{2}$ (B) $|\sin\alpha - \cos\alpha| = \frac{\sqrt{6}}{2}$

(C) $\sin^4 x + \cos^4\alpha = \frac{7}{8}$ (D) $\tan^2\alpha + \cot^2\alpha = 12$

48. Rút gọn $B = \sqrt{2 + 2\cos 2x}$ với $x \in [\frac{\pi}{2}, \pi]$ ta được:

(A) 2cosx (B) –2cosx (C) +2sinx (D) –2sinx

49. Biết $\cos 2x = \frac{1}{3}$ thì giá trị của $C = \frac{1 + \sin^2 x}{\cos^2 x}$ bằng:

(A) 1 (B) –1 (C) 2 (D) –2

50. Biết $\sin\frac{a}{2} + \cos\frac{a}{2} = -\frac{1}{2}$ thì cos2x bằng:

(A) $\frac{1}{8}$ (B) $-\frac{1}{8}$ (C) $\frac{1}{4}$ (D) $-\frac{1}{4}$

51. $D = 4\cos^4 x - 2\cos 2x - \frac{1}{2}\cos 4x$ độc lập với x và D bằng:

(A) $\frac{3}{2}$ (B) $-\frac{3}{2}$ (C) $\frac{3}{4}$ (D) $\frac{1}{2}$

52*. Giá trị nhỏ nhất $E = \left(1 + \frac{1}{\sin^2 x}\right)^2 + \left(1 + \frac{1}{\cos^2 x}\right)^2$ bằng:

(A) 0 (B) 18 (C) 9 (D) $\frac{9}{2}$

53. Giá trị nhỏ nhất m và giá trị lớn nhất M của $y = \sin^4 x + \cos^4 x$ là:

(A) $m = 0$ và $M = 1$ (B) $m = \frac{1}{2}$ và $M = 1$

(C) $m = \frac{1}{2}$ và $M = 2$ (D) $m = 1$ và $M = 2$

54. Cho $0 < \alpha < \frac{\pi}{4}$ và $\tan\alpha = \frac{1}{3}$ thì sin4x bằng:

(A) $\frac{24}{25}$ (B) $\frac{8}{25}$ (C) $\frac{6}{25}$ (D) $-\frac{24}{25}$

55. Rút gọn $X = \frac{\sin^2 3a}{\sin^2 a} - \frac{\cos^2 3a}{\cos^2 a}$ ta được:

(A) $X = 2\cos 2a$ (B) $X = 4\cos 2a$

(C) $X = 8\cos 2a$ (D) $X = 16\cos 2a$

56. Biết $\cos 2x = \frac{1}{3}$ thì $Y = \frac{\sin^2 2x + 4\sin^2 x - 4}{1 - 8\sin^2 x - \cos 4x}$ bằng:

(A) $Y = 2$ (B) $Y = 4$ (C) $Y = -2$ (D) $Y = 8$

57. Giá trị của $A = \tan^2\frac{\pi}{12} + \cot^2\frac{\pi}{12}$ bằng:

(A) 14 (B) 11 (C) 8 (D) 7

Chủ đề 6. CÔNG THỨC BIẾN ĐỔI TỔNG THÀNH TÍCH

58. Giá trị của $C = \sin\frac{17\pi}{12} - \sin\frac{\pi}{12}$ bằng:

(A) $\frac{\sqrt{6}}{2}$ (B) $-\frac{\sqrt{6}}{2}$ (C) $-\sqrt{6}$ (D) $\sqrt{6}$

59. $C = \sin\frac{11\pi}{12} + \sin\frac{5\pi}{12}$ bằng:

(A) $\frac{\sqrt{6}}{2}$ (B) $-\frac{\sqrt{6}}{2}$ (C) $-\frac{\sqrt{6}}{4}$ (D) $\frac{\sqrt{6}}{4}$

60. Giá trị của $E = \cos\frac{\pi}{9} + \cos\frac{5\pi}{9} + \cos\frac{7\pi}{9}$ bằng:

(A) 1 (B) -1 (C) 0 (D) $\frac{1}{2}$

61. Giá trị của $K = \cos 14^0 + \cos 134^0 + \cos 106^0$ bằng:

(A) 1 (B) -1 (C) 2 (D) 0

62. Giá trị của $R = \frac{\cos 15^0 + \sin 15^0}{\cos 15^0 - \sin 15^0}$ bằng:

(A) $\frac{\sqrt{3}}{3}$ (B) $-\frac{\sqrt{3}}{3}$ (C) $\sqrt{3}$ (D) $-\sqrt{3}$

63. Giá trị của $S = \sin^2 x + \sin^2(\frac{2\pi}{3} + x) + \sin^2(\frac{2\pi}{3} - x)$ bằng:

(A) $\frac{2}{3}$ (B) $\frac{3}{2}$ (C) $\frac{4}{3}$ (D) $\frac{3}{4}$

64. Giá trị của $T = \tan 9^0 + \cot 9^0 - \tan 27^0 - \cot 27^0$ bằng:

(A) -4 (B) 4 (C) -8 (D) 8

65. Rút gọn $X = \cos^2(\frac{2\pi}{3} + x) - \cos^2(\frac{2\pi}{3} - x)$ ta được:

(A) $X = -\frac{\sqrt{3}}{2}\cos 2x$ (B) $X = +\frac{\sqrt{3}}{2}\cos 2x$

(C) $X = -\frac{\sqrt{3}}{2}\sin 2x$ (D) $X = +\frac{\sqrt{3}}{2}\sin 2x$

66. Giá trị của $B = \cos\frac{11\pi}{12} - \cos\frac{5\pi}{12}$ bằng:

(A) $\frac{\sqrt{6}}{2}$ (B) $-\frac{\sqrt{6}}{2}$ (C) $-\sqrt{6}$ (D) $-\frac{\sqrt{6}}{4}$

67*. Giá trị của $P = \sin^2\frac{\pi}{9} + \sin^2\frac{2\pi}{9} + \sin^2\frac{4\pi}{9}$ bằng:

(A) 3 (B) $+\frac{3}{2}$ (C) $\frac{1}{2}$ (D) 1

Chủ đề 7. CÔNG THỨC BIẾN ĐỔI TÍCH THÀNH TỔNG

68. Giá trị của $D = \sin\frac{\pi}{8}\cos\frac{3\pi}{8}$ bằng:

(A) $\frac{1}{2}\left(1+\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ (B) $-\frac{1}{2}\left(1+\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$

(C) $\frac{1}{2}\left(1-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ (D) $\frac{1}{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}-1\right)$

69. $D = \sin\frac{13\pi}{24}.\sin\frac{5\pi}{24}$ bằng:

(A) $\frac{1+\sqrt{2}}{4}$ (B) $\frac{1-\sqrt{2}}{4}$ (C) $\frac{\sqrt{2}-1}{4}$ (D) $\frac{1+\sqrt{2}}{2}$

70. Giá trị của $M = \frac{1}{\sin 10^0} - 4\sin 70^0$ bằng:

(A) 2 (B) –2 (C) 1 (D) –1

71. Giá trị của $N = 8\sin 10^0.\sin 50^0.\sin 70^0$ bằng:

(A) 1 (B) –1 (C) 2 (D) –2

72. Giá trị của $y = \frac{\sin 55^0}{\sin 11^0} - 4\cos 33^0\cos 11^0$ bằng:

(A) –2 (B) 2 (C) –1 (D) 1

73. Giá trị của $F = \sin 20^0.\sin 40^0.\sin 80^0$ bằng:

(A) $\frac{\sqrt{3}}{4}$ (B) $-\frac{\sqrt{3}}{4}$ (C) $+\frac{\sqrt{3}}{8}$ (D) $-\frac{\sqrt{3}}{8}$

74*. Giá trị của $H = \cos\frac{\pi}{7} - \cos\frac{2\pi}{7} + \cos\frac{3\pi}{7}$ bằng:

(A) $\frac{1}{2}$ (B) $-\frac{1}{2}$ (C) 1 (D) 0

TRẢ LỜI CÂU HỎI TRẮC NGHIỆM

Chủ đề 1. HÀM LƯỢNG GIÁC

1. $y = \sin x \Rightarrow y' = \cos x \le 0\ \forall x \in (\frac{\pi}{2}, \pi)$ câu (A) đúng

$y = \cos x \Rightarrow y' = -\sin x \le 0\ \forall x \in (0, \pi)$ câu (B) đúng

$y = \tan x \Rightarrow y' = \dfrac{1}{\cos^2 x} > 0\ \forall x \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ câu (C) đúng

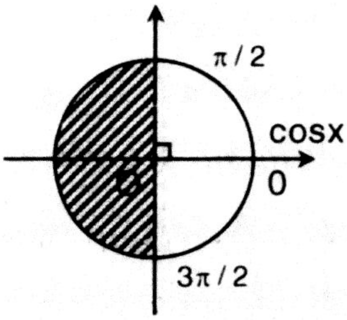
$y = \cot x \Rightarrow y' = \dfrac{-1}{\sin^2 x} < 0 \Rightarrow$ y giảm trên $(0, \pi)$ câu (D) sai

Chú ý: Có thể dựa vào hình dạng đồ thị (trang 7) để xét tăng giảm của các hàm số lượng giác

2. Trên $[0, 2\pi]$: $y = \sqrt{\cos x} \in R$

$\Leftrightarrow \cos x \ge 0$

$\Leftrightarrow x \in [0, \frac{\pi}{2}] \cup [\frac{3\pi}{2}, 2\pi]$ chọn (B)



3. Bấm Máy tính

Câu (A) cho k = 0, 1, 2 → (A) đúng

Câu (B) cho k = 0, 1, 2 → (B) đúng

Câu (C) cho $k = 1 \Rightarrow y = \tan\frac{\pi}{2}$ không xác định $\Rightarrow$ (C) sai

4. $y = \sin x \sin 2x$ là hàm chẵn

$y = x + \cos x$ không chẵn, không lẻ

$y = \cos x \cos 3x$ là hàm chẵn

$y = x^3 + \sin x$ lẻ vì $y(-x) = (-x)^3 + \sin(-x) = -(x^3 + \sin x)$

Vậy (D) đúng.

5. Ta có: $-1 \le \cos x \le 1 \Leftrightarrow 2 \ge -2\cos x \ge -2 \Leftrightarrow 5 \ge -2\cos x + 3 \ge 1$

Dấu = có xảy ra

Vậy $\underset{R}{\text{Max}}\, y = 5$ và $\underset{R}{\text{Min}}\, y = 1$. Chọn (C)

6. $y = \tan(\frac{x}{2} - \frac{\pi}{3})$ xác định $\Leftrightarrow \frac{x}{2} - \frac{\pi}{3} \ne \frac{\pi}{2} + k\pi$

$\Leftrightarrow \frac{x}{2} \ne \frac{5\pi}{6} + k\pi \Leftrightarrow x \ne \frac{5\pi}{3} + k2\pi$. Chọn (C)

7. $y = \cot(2x - \pi)$ xác định

$\Leftrightarrow 2x - \pi \neq k\pi \Leftrightarrow 2x \neq \pi + k\pi \Leftrightarrow x \neq \frac{\pi}{2} + \frac{k\pi}{2}$. Chọn (B)

8. Khi $a \neq 0$ các hàm số $y = \sin(ax + b)$, $y = \cos(ax + b)$ tuần hoàn chu kỳ $\frac{2\pi}{a}$. Vậy (A) (B) đúng.

Các hàm số $y = \tan(ax + b)$, $y = \cot(ax + b)$, tuần hoàn chu kỳ $\frac{\pi}{a}$

→ (D) sai.

9. $y = \sin\frac{x}{2}$ có chu kỳ $T_1 = \frac{2\pi}{\frac{1}{2}} = 4\pi$

$y = \cos\frac{2x}{3}$ có chu kỳ $T_2 = \frac{2\pi}{\frac{2}{3}} = 3\pi$

$\Rightarrow y = \sin\frac{x}{2} + \cos\frac{2x}{3}$ có chu kỳ $T = 12\pi$ (bội số chung nhỏ nhất của 4π và 3π). Chọn (D)

10. $y = \tan(2x + \frac{\pi}{4})$

$y \in R \Leftrightarrow 2x + \frac{\pi}{3} \neq \frac{\pi}{2} + k\pi \Leftrightarrow 2x \neq \frac{\pi}{6} + k\pi$ → (A) đúng

Chu kỳ $T = \frac{\pi}{2}$ → (C) sai

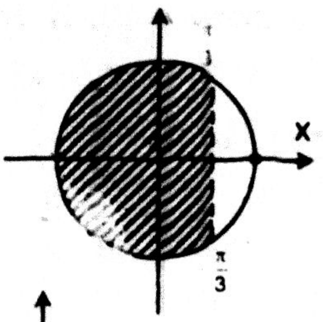
11. $y = \tan x + \cot x$ xác định:

$\Leftrightarrow \sin x$ và $\cos x \neq 0 \Leftrightarrow \sin 2x \neq 0 \Leftrightarrow 2x \neq k\pi$

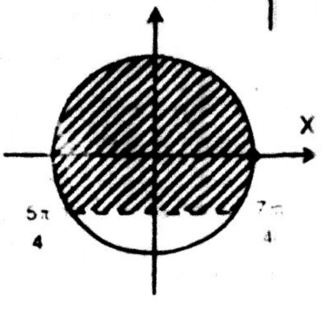
Chọn (C)

12. $x \in \left(-\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{3}\right]$ thì $\cos x = y \in \left[\frac{1}{2}, 1\right]$.

Chọn (A)



13. $x \in \left(\frac{5\pi}{4}, \frac{7\pi}{4}\right)$ thì $\sin x = y \in \left[-1, \frac{-\sqrt{2}}{2}\right]$



14. $-2 \le 2\sin x \le 2 \Rightarrow 1 < 2\sin x + 3 \le 5$. Chọn (D)

15. $0 \le |\sin 2x| \le 1 \Rightarrow 0 \ge -2|\sin 2x| \ge -2$

$$\Rightarrow 1 \ge 1 - 2|\sin 2x| \ge -1 \Rightarrow \text{Chọn (B)}$$

Chủ đề 1. HÀM LƯỢNG GIÁC

16. $90^0 < \alpha < 180^0 \Rightarrow \begin{cases} \sin\alpha > 0 \\ \cos\alpha < 0 \end{cases} \Rightarrow \cot\alpha < 0$

Ta có: $1 + \tan^2\alpha = \dfrac{1}{\cos^2\alpha} = 25$

$$\Rightarrow \tan^2\alpha = 24 \Rightarrow \tan\alpha = -2\sqrt{6} \Rightarrow \cot\alpha = -\frac{1}{2\sqrt{6}}\text{. Chọn (D)}$$

17. $\pi < \alpha < \dfrac{3\pi}{2} \Rightarrow \sin\alpha < 0$

Ta có: $\dfrac{1}{\sin^2\alpha} = 1 + \cot^2\alpha = 1 + \dfrac{16}{9} = \dfrac{25}{9}$

$$\Rightarrow \sin^2\alpha = \frac{9}{25} \Rightarrow \sin\alpha = -\frac{3}{5}\text{. Chọn (C)}$$

18. $A = 2(1 - \sin^2 x)^2 - \sin^4 x + \sin^2 x(1 - \sin^2 x) + 3\sin^2 x$

Đặt $t = \sin^2 x$

$\Rightarrow A = 2(1 - 2t + t^2) - t^2 + t(1 - t) + 3t = 2$. Chọn (A)

19. $B = \dfrac{2}{\tan x - 1} + \dfrac{\cot x + 1}{\cot x - 1}$. Đặt $t = \cot x$

$$\Rightarrow B = \frac{2}{\frac{1}{t} - 1} + \frac{t+1}{t-1} = \frac{2t}{1-t} - \frac{t+1}{1-t} = \frac{t-1}{1-t} = -1\text{. Chọn (C)}$$

20. $C = \sin\alpha - \sqrt{\cot^2\alpha - \cos^2\alpha} = \sin\alpha - \sqrt{\cos^2\alpha\left(\dfrac{1}{\sin^2\alpha} - 1\right)}$

$$C = \sin\alpha - |\cos\alpha|\sqrt{\frac{1 - \sin^2\alpha}{\sin^2\alpha}} = \sin\alpha - \frac{\cos^2\alpha}{|\sin x|}$$

$$= \sin\alpha + \frac{|\cos^2\alpha|}{\sin\alpha} = \frac{\sin^2\alpha + \cos^2\alpha}{\sin\alpha}$$

$= \dfrac{1}{\sin\alpha}$ (do $\alpha \in (-\pi, 0) \Rightarrow \sin\alpha < 0$). Chọn (B)

21. $D = \dfrac{\dfrac{1}{\sin^2 x}}{1 - \cot x - \cot^2 x} = \dfrac{\dfrac{1}{4}+1}{1-\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{4}} = \dfrac{\dfrac{5}{4}}{\dfrac{1}{4}} = 5$ → Chọn (A)

22. $X = \dfrac{\dfrac{\sin x\cos x}{\cos^2 x}}{\dfrac{\sin^2 x - \cos^2 x}{\cos^2 x}} = \dfrac{\tan x}{\tan^2 x - 1} = \dfrac{\dfrac{3}{5}}{\dfrac{9}{25}-1} = \dfrac{15}{-16}$ → Chọn (B)

23*. $y = 1 - \sin^2 x - \sin x$. Đặt $t = \sin x$ thì $t \in [-1, 1]$

$\Rightarrow y = -t^2 - t + 1 \Rightarrow y' = -2t - 1$

t	−1		−1/2		1
y'	▨	+	0	−	▨
y	▨	↗		↘	▨

$\text{Max}(y) = y\left(-\dfrac{1}{2}\right) = -\dfrac{1}{4} + \dfrac{1}{2} + 1 = \dfrac{5}{4}$

24. $E = \dfrac{\cot^2 x}{\sin^2 y} - \dfrac{1}{\sin^2 x} - \cot^2 x.\cot^2 y$

$= \cot^2 x(1 + \cot^2 y) - (1 + \cot^2 x) - \cot^2 x.\cot^2 y = -1$

Chọn (B)

25*. $F = \dfrac{1}{\sin^6 x} - \dfrac{\cos^6 x}{\sin^6 x} - \dfrac{3\cos^2 x}{\sin^4 x}$

$= \dfrac{1}{\sin^6 x}[1 - \cos^6 x] - \dfrac{3\cos^2 x}{\sin^4 x}$

$= \dfrac{(1 - \cos^2 x)(1 + \cos^2 x + \cos^4 x)}{\sin^6 x} - \dfrac{3\cos^2 x}{\sin^4 x}$

$= \dfrac{1 + \cos^2 x + \cos^4 x}{\sin^4 x} - \dfrac{3\cos^2 x}{\sin^4 x}$

$= \dfrac{1 - 2\cos^2 x + \cos^4 x}{\sin^4 x} = \dfrac{(1 - \cos^2 x)^2}{\sin^4 x} = 1$. Chọn (A)

26. Dễ dàng thấy (A) đúng → (D) cũng đúng

Ta có: $\dfrac{1}{\sin^2 15} = 1 + \cot^2 15 = 1 + (7 + 4\sqrt{3}) = 4(2 + \sqrt{3})$

$\Rightarrow \sin 15^0 = \dfrac{1}{2\sqrt{\sqrt{3}+2}} = \dfrac{\sqrt{2-\sqrt{3}}}{2}$. (B) đúng

(C) sai vì $\cos 15^0 = \cot 15^0.\sin 15^0 = \dfrac{(2+\sqrt{3})(\sqrt{2-\sqrt{3}})}{2}$

$$= \frac{\sqrt{2+\sqrt{3}}.\sqrt{(2+\sqrt{3})(2-\sqrt{3})}}{2} = \frac{1}{2}\sqrt{2-\sqrt{3}}$$

27. $\tan^3\alpha + \cot^3\alpha = (\tan\alpha + \cot\alpha)(\tan^2\alpha + \cot^2\alpha - \cot\alpha\tan\alpha)$

$$= 2[(\tan\alpha + \cot\alpha)^2 - 3\tan\alpha\cot\alpha] = 2(4-3) = 2$$

Chọn (A)

Chủ đề 3. CUNG LIÊN KẾT

28. D sai vì $\cot(\dfrac{\pi}{2} + \alpha) = -\tan x$

29. C đúng vì $\tan(\alpha - \dfrac{\pi}{2}) = -\tan(\dfrac{\pi}{2} - \alpha) = -\cot x$

30. $\sin\dfrac{10\pi}{3} = \sin(2\pi + \pi + \dfrac{\pi}{3}) = \sin(\pi + \dfrac{\pi}{3}) = -\sin\dfrac{\pi}{3} = -\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

$\cos 510^0 = \cos(360^0 + 150^0) = +\cos 150^0 = -\cos 30^0 = -\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

$\tan\dfrac{35\pi}{4} = \tan(9\pi - \dfrac{\pi}{4}) = +\tan(-\dfrac{\pi}{4}) = -1$ (C) sai.

$\cot 585^0 = \cot(540^0 + 45^0) = \cot 45^0 = 1$

31. $B = \cos 325^0 + \sin 235^0 + \tan 205^0.\tan 295^0$

$= \cos 35^0 - \sin 55^0 + \tan 25^0.\tan 115^0$

$= \sin 55^0 - \sin 55^0 + \tan 25^0(-\cot 25^0) = -1 \rightarrow$ Chọn (B)

32. $C = \dfrac{-\sin 54^0 - \cos 36^0}{\sin 36^0 + \cos 54^0}.\tan 36^0 = \dfrac{-2\cos 36^0}{2\sin 36^0}.\tan 36^0 = -1$. Chọn (B)

33. $\sin(\dfrac{14}{3}\pi) = \sin(4\pi + \dfrac{2\pi}{3}) = \sin\dfrac{2\pi}{3} = \sin\dfrac{\pi}{3} = \dfrac{\sqrt{3}}{2} \rightarrow$ (B) đúng

$$\frac{1}{\sin^2\frac{29\pi}{4}} = 1 + \cot^2\frac{29\pi}{4}$$

$$= 1 + \cot^2(7\pi + \frac{\pi}{4}) = 1 + \tan^2\frac{\pi}{4} = 2 \rightarrow \text{(D) đúng}$$

$\tan^2\dfrac{15\pi}{4} = \tan^2(4\pi - \dfrac{\pi}{4}) = 1 \rightarrow$ (A) đúng

$\cos\dfrac{25\pi}{6} = \cos(4\pi + \dfrac{\pi}{6}) = \cos\dfrac{\pi}{6} = \dfrac{\sqrt{3}}{2} \rightarrow$ (C) sai

34. $\cos(-188^0) = \cos188^0 = -\cos8^0$ → (A) sai

$\sin278^0 = -\sin98^0 = -\cos8^0$ → (B) đúng

$\cot368^0 = \cot8^0$ → (C) sai

$\tan98^0 = -\cot8^0$ → (D) sai

35. $A = \dfrac{(\cot44^0 + \tan46^0)\cos46^0}{\cos44^0} = \dfrac{2\tan46^0 + \cos46^0}{\sin46^0} = 2$. Chọn (A)

36. $A + B = \pi - C \Rightarrow \tan(A + B) = -\tan C$ → (C) sai

37*. • $\dfrac{A + B + 3C}{2} = \dfrac{(A + B + C) + 2C}{2} = \dfrac{\pi}{2} + C$

$\Rightarrow \sin\dfrac{A + B + 3C}{2} = \sin(\dfrac{\pi}{2} + C) = \cos C$ → (A) đúng

• $A + B - C = A + B + C - 2C = \pi - 2C$

$\Rightarrow \cos(A + B - C) = \cos(\pi - 2C) = -\cos2C$ → (B) đúng

• $\dfrac{A + B - 2C}{2} = \dfrac{\pi - 3C}{2}$

$\rightarrow \tan\dfrac{A + B - 2C}{2} = \tan(\dfrac{\pi}{2} - \dfrac{3C}{2}) = \cot\dfrac{3C}{2}$ → (C) đúng

• $\dfrac{A + B + 2C}{2} = \dfrac{\pi + C}{2}$

$\Rightarrow \cot\dfrac{A + B + 2C}{2} = \cot(\dfrac{\pi}{2} + \dfrac{C}{2}) = -\tan\dfrac{C}{2}$ → (D) sai

Chủ đề 4. CÔNG THỨC CỘNG

38. $\tan2x = \tan[(x + \alpha) + (x - \alpha)] = \dfrac{\tan(x + \alpha) + \tan(x - \alpha)}{1 - \tan(x + \alpha)\tan(x - \alpha)}$

$= \dfrac{2 + 3}{1 - 2(3)} = \dfrac{5}{-5} = -1$ → Chọn (B)

39. $\cos15^0 = \cos(45^0 - 30^0)$

$= \cos45^0\cos30^0 + \sin45^0\sin30^0 = \dfrac{\sqrt{2}}{2}\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2} + \dfrac{1}{2}\right)$

Chọn (A)

40. $\sin105^0 = \sin(60^0 + 45^0)$

$= \sin60^0\cos45^0 + \sin45^0\cos60^0 = \dfrac{\sqrt{2}}{2}\left(\dfrac{1}{2} + \dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)$. Chọn (B)

41. $X = \cos 53^0 \sin 23^0 + \sin(-53^0)\cos 23^0 = \sin(23^0 - 53^0) = -\dfrac{1}{2}$

Chọn (D)

42. $\sin x - \cos x = -\dfrac{\sqrt{2}}{2}\cos(x + \dfrac{\pi}{4}) \rightarrow$ (D) sai

43. $A = \dfrac{(\cos a\cos b - \sin a\sin b)(\cos a\cos b + \sin a\sin b)}{\sin^2 a\sin^2 b}$

$A = \dfrac{\cos^2 a\cos^2 b - \sin^2 a\sin^2 b}{\sin^2 a\sin^2 b}$

$A = \cot^2 a\cot^2 b - 1$. Chọn (B)

44. $\tan(\alpha + \beta) = \dfrac{\tan\alpha + \tan\beta}{1 - \tan\alpha\tan\beta} = \dfrac{\dfrac{4}{3} + 7}{1 - \dfrac{4}{3}(7)} = \dfrac{25}{-25} = -1$

$\Rightarrow \alpha + \beta = -\dfrac{\pi}{4} + k\pi \rightarrow$ Chọn (D)

45. $\tan(A + B) = \dfrac{\dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{5}}{1 - \dfrac{1}{10}} = \dfrac{7}{9}$

$\Rightarrow \tan[(A + B) + C] = \dfrac{\tan(A + B) + \tan C}{1 - \tan(A + B)\tan C} = \dfrac{\dfrac{7}{9} + \dfrac{1}{8}}{1 - \dfrac{7}{9} \times \dfrac{1}{8}} = 1$

$\Rightarrow A + B + C = \dfrac{\pi}{4} \rightarrow$ Chọn (B)

46. $\sin 15^0 + \dfrac{\sin 30^0}{\cos 30^0}\cos 15^0$

$= \dfrac{1}{\cos 30^0}(\sin 15^0\cos 30^0 + \sin 30^0\cos 15^0)$

$= \dfrac{2}{\sqrt{3}}\sin 45^0 = \dfrac{2}{\sqrt{3}} . \dfrac{\sqrt{2}}{2} = \dfrac{\sqrt{6}}{3} \rightarrow$ Chọn (B)

Chủ đề 5. CÔNG THỨC NHÂN ĐÔI – NHÂN BA – HẠ BẬC

47. $\sin\alpha + \cos\alpha = \frac{1}{\sqrt{2}} \Rightarrow 1 + \sin2\alpha = \frac{1}{2} \Rightarrow \sin2\alpha = -\frac{1}{2} \rightarrow$ (A) đúng

$|\sin\alpha - \cos\alpha|^2 = 1 - \sin2\alpha = 1 + \frac{1}{2} = \frac{3}{2} \rightarrow$ (B) đúng

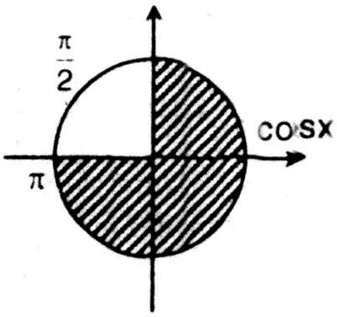
$\sin^4x + \cos^4x = 1 - \frac{1}{2}\sin^22\alpha = 1 - \frac{1}{8} = \frac{7}{8} \rightarrow$ (C) đúng

$\tan^2\alpha + \cot^2\alpha = \frac{\sin^4x + \cos^4\alpha}{\sin^2\alpha\cos^2\alpha} = \frac{\frac{7}{8}}{\frac{1}{8}} = 7 \rightarrow$ (D) sai

48. $B = \sqrt{2 + 2\cos2x} = \sqrt{2 + 2(\cos^2x - 1)}$

$B = \sqrt{4\cos^2x} = 2|\cos x| = -2\cos x$

Chọn (B) vì $x \in \left[\frac{\pi}{2}, \pi\right]$ thì $\cos x < 0$



49. $C = \frac{1 + \sin^2x}{\cos^2x} = \frac{1 + \frac{1 - \cos2x}{2}}{\frac{1 + \cos2x}{2}}$

$= \frac{3 - \cos2x}{1 + \cos2x} = \frac{3 - \frac{1}{3}}{1 + \frac{1}{3}} = \frac{8}{4} = 2 \rightarrow$ Chọn (C)

50. $\sin\frac{a}{2} + \cos\frac{a}{2} = -\frac{1}{2} \Rightarrow 1 + \sin a = \frac{1}{4} \Rightarrow \sin a = -\frac{3}{4}$

Ta có: $\cos2a = 1 - 2\sin^2a = 1 - 2\left(\frac{9}{16}\right) = 1 - \frac{9}{8} = -\frac{1}{8} \rightarrow$ Chọn (B)

51. $D = 4\left(\frac{1 + \cos2x}{2}\right)^2 - 2\cos2x - \frac{1}{2}(2\cos^22x - 1)$

$= 1 + 2\cos2x + \cos^22x - 2\cos2x - \cos^22x + \frac{1}{2} = \frac{3}{2}$

Chọn (A)

52. $E = \left(1 + \frac{1}{\sin^2x}\right)^2 + \left(1 + \frac{1}{\cos^2x}\right)^2$

$= \frac{1}{\sin^4x} + \frac{1}{\cos^4x} + 2\left(\frac{1}{\sin^2x} + \frac{1}{\cos^2x}\right) + 2$

$$= \frac{\sin^4 x + \cos^4 x + 2(\sin^2 x\cos^4 x + \sin^4 x\cos^2 x)}{\sin^4 x\cos^4 x} + 2$$

$$= \frac{\sin^4 x + \cos^4 x + 2\sin^2 x\cos^2 x(\sin^2 x + \cos^2 x)}{\sin^4 x\cos^4 x} + 2$$

$$= \frac{(\sin^2 x + \cos^2 x)^2}{\sin^4 2x} + 2 = \frac{16}{\sin^4 2x} + 2 \geq 16 + 2$$

16

$\Rightarrow$ MinE = 18 → Chọn (B)

53. $y = \sin^4 x + \cos^4 x = (\sin^2 x + \cos^2 x)^2 - 2\sin^2 x\cos^2 x$

$$= 1 - \frac{1}{2}\sin^2 2x$$

Do: $0 \leq \sin^2 2x \leq 1 \Rightarrow 0 \geq -\frac{1}{2}\sin^2 2x \geq -\frac{1}{2} \Rightarrow 1 \geq y \geq \frac{1}{2}$

Dấu = có xảy ra

Vậy $m = \frac{1}{2}$ và $M = 1$ → Chọn (B)

54. Cho $\tan\alpha = \frac{1}{3} = t$ thì $\sin 2\alpha = \frac{2t}{1 + t^2} = \frac{\frac{2}{3}}{1 + \frac{1}{9}} = \frac{2}{3} \times \frac{9}{10} = \frac{3}{5}$

Do $0 < 2\alpha < \frac{\pi}{2} \Rightarrow \cos 2\alpha = \sqrt{1 - \frac{9}{25}} = \frac{4}{5}$

Vậy $\sin 4\alpha = 2\left(\frac{3}{5}\right)\left(\frac{4}{5}\right) = \frac{24}{25}$ → Chọn (A)

55. $X = \frac{\sin^2 3a}{\sin^2 a} - \frac{\cos^2 3a}{\cos^2 a} = \left(\frac{3\sin a - 4\sin^3 a}{\sin a}\right)^2 - \left(\frac{4\cos^3 a - 3\cos a}{\cos a}\right)^2$

$= (3 - 4\sin^2 a)^2 - (4\cos^2 a - 3)^2$

$= 16(\sin^4 a - \cos^4 a) - 24\sin^2 a + 24\cos^2 a$

$= 16(\sin^2 a - \cos^2 a) - 24(\sin^2 a - \cos^2 a) = +8\cos 2a$ → Chọn (C)

56. $y = \frac{\sin^2 2x + 4\sin^2 x - 4}{1 - 8\sin^2 x - \cos 4x}$ Đặt $t = \cos 2x = \frac{1}{3}$

$$= \frac{\sin^2 2x + 2(1 - \cos 2x) - 4}{1 - 4(1 - \cos 2x) - (2\cos^2 2x - 1)}$$

$$= \frac{(1 - t^2) - 2 - 2t}{-2t^2 + 4t - 2} = \frac{-(t^2 + 2t + 1)}{-2(t^2 - 2t + 1)}$$

$$= \frac{1}{2}.\frac{(t+1)^2}{(t-1)^2} = \frac{1}{2}.\frac{\frac{16}{9}}{\frac{4}{9}} = 2 \rightarrow \text{Chọn (A)}$$

57. $$A = \tan^2\frac{\pi}{12} + \cot^2\frac{\pi}{12} = \frac{1}{\cos^2\frac{\pi}{12}} + \frac{1}{\sin^2\frac{\pi}{12}} - 2$$

$$= \frac{1}{\sin^2\frac{\pi}{12}\cos^2\frac{\pi}{12}} - 2 = \frac{4}{\sin^2\frac{\pi}{6}} - 2 = \frac{4}{\frac{1}{4}} - 2 = 14$$

Chọn (A)

Chủ đề 6. CÔNG THỨC BIẾN ĐỔI TỔNG THÀNH TÍCH

58. $$C = \sin\frac{17\pi}{12} - \sin\frac{\pi}{12} = 2\cos\frac{9\pi}{12}\sin\frac{8\pi}{12}$$

$$= 2\cos\frac{3\pi}{4}\sin\frac{2\pi}{3} = 2\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = -\frac{\sqrt{6}}{2} \rightarrow \text{Chọn (B)}$$

59. $$C = \sin\frac{11\pi}{12} + \sin\frac{5\pi}{12} = 2\sin\frac{8\pi}{12}\cos\frac{3\pi}{12}$$

$$= 2\sin\frac{2\pi}{3}\cos\frac{\pi}{4} = 2(\frac{\sqrt{3}}{2})(\frac{\sqrt{2}}{2}) = \frac{\sqrt{6}}{2} \rightarrow \text{Chọn (A)}$$

60. $$E = (\cos\frac{\pi}{9} + \cos\frac{7\pi}{9}) + \cos\frac{5\pi}{9} = 2\cos\frac{4\pi}{9}\cos\frac{3\pi}{9} + \cos\frac{5\pi}{9}$$

$$= \cos\frac{4\pi}{9} + \cos\frac{5\pi}{9} = 0 \text{ (cung bù)} \rightarrow \text{Chọn (C)}$$

61. $$K = \cos14^0 + \cos134^0 + \cos106^0$$

$$= \cos14^0 + 2\cos120^0.\cos14^0$$

$$= \cos14^0 + 2(-\frac{1}{2})\cos14^0 = 0 \rightarrow \text{Chọn (D)}$$

62. $$R = \frac{\cos15^0 + \sin15^0}{\cos15^0 - \sin15^0} = \frac{\cos15^0 + \cos75^0}{\cos15^0 - \cos75^0}$$

$$= \frac{2\cos45^0.\cos30^0}{2\sin45^0.\sin30^0} = \cot30^0 = \sqrt{3} \rightarrow \text{Chọn (C)}$$

hay $R = \frac{1 + \tan 15^0}{1 - \tan 15^0} = \frac{\tan 45^0 + \tan 15^0}{1 - \tan 45^0.\tan 15^0} = \tan(45^0 + 15^0)$

$= \sqrt{3}$ → Chọn (C)

63. $S = \frac{1}{2}[(1 - \cos 2x) + 1 - \cos(\frac{4\pi}{3} + 2x) + 1 - \cos(\frac{4\pi}{3} - 2x)]$

$= \frac{3}{2} - \frac{1}{2}\cos 2x - \frac{1}{2}[\cos(\frac{4\pi}{3} + 2x) + \cos(\frac{4\pi}{3} - 2x)]$

$= \frac{3}{2} - \frac{1}{2}\cos 2x - \frac{2}{2}\cos\frac{4\pi}{3}\cos 2x = \frac{3}{2}$ → Chon (B)

Chú ý: Có thể dự đoán kết quả

Chọn $x = 0 \Rightarrow S = 2\sin^2\frac{2\pi}{3} = 2\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 = \frac{3}{2}$ → Chọn (B)

64. Ta có: $\tan a + \cot a = \frac{\sin a}{\cos a} + \frac{\cos a}{\sin a} = \frac{1}{\sin a\cos a} = \frac{2}{\sin 2a}$

Vậy $T = \frac{2}{\sin 18^0} - \frac{2}{\sin 54^0}$

$= \frac{2(\sin 54^0 - \sin 18^0)}{\sin 18^0.\sin 54^0} = \frac{4\cos 36^0\sin 18^0}{\sin 18^0.\sin 54^0}$

$= \frac{4\cos 36^0}{\sin 54^0} = 4$ → Chọn (B)

65. $X = \cos^2(\frac{2\pi}{3} + x) - \cos^2(\frac{2\pi}{3} - x)$

$= \frac{1}{2}[1 + \cos((\frac{4\pi}{3} + 2x)] - \frac{1}{2}[1 - \cos(\frac{4\pi}{3} - 2x)]$

$= \frac{1}{2}[\cos(\frac{4\pi}{3} + 2x) + \cos(\frac{4\pi}{3} - 2x)] = \cos\frac{4\pi}{3}\cos 2x$

$= -\frac{\sqrt{3}}{2}\cos 2x$ → Chọn (A)

66. $B = \cos\frac{11\pi}{12} - \cos\frac{5\pi}{12} = -2\sin\frac{8\pi}{12}\sin\frac{3\pi}{12} = -2\sin\frac{2\pi}{3}\sin\frac{\pi}{4}$

$= -2\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = -\frac{\sqrt{6}}{2}$ → Chọn (B)

67*. $P = \sin^2\frac{\pi}{9} + \sin^2\frac{2\pi}{9} + \sin^2\frac{4\pi}{9}$

$= \frac{1}{2}(1 - \cos\frac{2\pi}{9}) + \frac{1}{2}(1 - \cos\frac{4\pi}{9}) + \frac{1}{2}(1 - \cos\frac{8\pi}{9})$

$= \frac{3}{2} - \frac{1}{2}(\cos\frac{2\pi}{9} + \cos\frac{4\pi}{9} + \cos\frac{8\pi}{9})$

$= \frac{3}{2} - \frac{1}{2}[2\cos\frac{3\pi}{9}\cos\frac{\pi}{9} + \cos\frac{8\pi}{9}]$

$= \frac{3}{2} - \frac{1}{2}[2(\frac{1}{2})\cos\frac{\pi}{9} - \cos\frac{\pi}{9}] = \frac{3}{2}$ → Chọn (B)

Chủ đề 7. CÔNG THỨC BIẾN ĐỔI TÍCH THÀNH TỔNG

68. $D = \sin\frac{\pi}{8}\cos\frac{3\pi}{8} = \frac{1}{2}\left[\sin\frac{4\pi}{8} + \sin\left(\frac{2\pi}{8}\right)\right] = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ → Chọn (C)

69. $D = \sin\frac{13\pi}{24}.\sin\frac{5\pi}{24} = -\frac{1}{2}\left[\cos\frac{18\pi}{24} - \cos\frac{8\pi}{24}\right]$

$= -\frac{1}{2}(\cos\frac{3\pi}{4} - \cos\frac{\pi}{3}) = -\frac{1}{2}(-\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{1}{2})$ → Chọn (A)

70. $M = \frac{1}{\sin 10^0} - 4\sin 70^0 = \frac{1 - 4\sin 70^0.\sin 10^0}{\sin 10^0}$

$= \frac{1 + 2[\cos 80^0 \quad \cos 60^0]}{\sin 10^0} = \frac{1 + 2\cos 80^0 - 2(\frac{1}{2})}{\sin 10^0} = 2$ → Chọn (A)

71. $N = 8\sin 10^0.\sin 50^0.\sin 70^0 = -4\sin 10^0(\cos 120^0 - \cos 20^0)$

$= +2\sin 10^0 + 4\sin 10^0.\cos 20^0$

$= 2\sin 10^0 + 2[\sin 30^0 + \sin(-10^0)] = 1$ → Chọn (A)

72. $y = \frac{\sin 55^0 - 4\cos 33^0\sin 11^0\cos 11^0}{\sin 11^0}$

$y = \frac{\sin 55^0 - 2\cos 33^0\sin 22^0}{\sin 11^0} = \frac{\sin 55^0 - [\sin 55^0 + \sin(-11^0)]}{\sin 11^0} = 1$

Chọn (D)

73. $F = \sin 20^0.\sin 40^0.\sin 80^0 = -\frac{1}{2}(\cos 60^0 - \cos 20^0).\sin 80^0$

$= -\frac{1}{4}\sin 80^0 + \frac{1}{2}\sin 80^0\cos 20^0$

$$= -\frac{1}{4}\sin 80^0 + \frac{1}{4}(\sin 100^0 - \sin 60^0)$$

$$= -\frac{1}{4}\sin 60^0 \text{ (do } \sin 100^0 = \sin 80^0) = -\frac{\sqrt{3}}{8} \rightarrow \text{Chọn (D)}$$

74. $H = \cos\frac{\pi}{7} - \cos\frac{2\pi}{7} + \cos\frac{3\pi}{7}$

$$\Rightarrow 2H\sin\frac{\pi}{7} = 2\sin\frac{\pi}{7}\cos\frac{\pi}{7} - 2\sin\frac{\pi}{7}\cos\frac{2\pi}{7} + 2\sin\frac{\pi}{7}\cos\frac{3\pi}{7}$$

$$\Rightarrow 2H\sin\frac{\pi}{7} = \sin(-\frac{\pi}{7})$$

$$\Rightarrow 2H\sin\frac{\pi}{7} = \sin\frac{\pi}{7} \text{ (do } \sin\frac{3\pi}{7} = \sin\frac{4\pi}{7})$$

$$\Rightarrow H = \frac{1}{2} \rightarrow \text{Chọn (A)}$$

Chương 2. PHƯƠNG TRÌNH LƯỢNG GIÁC

I. Phương trình lượng giác cơ bản

$$\sin u = \sin v \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} u = v + k2\pi \\ u = \pi - v + k2\pi \end{array}\right.$$

$$\cos u = \cos v \Leftrightarrow u = \pm v + k2\pi$$

$$\tan u = \tan v \Leftrightarrow \begin{cases} u \neq \dfrac{\pi}{2} + k\pi \\ u = v + k'\pi \end{cases} \qquad (k, k' \in \mathbb{Z})$$

$$\cot u = \cot v \Leftrightarrow \begin{cases} u \neq k\pi \\ u = v + k'\pi \end{cases}$$

Đặc biệt:

- $\sin u = 0 \Leftrightarrow u = k\pi$ • $\cos u = 0 \Leftrightarrow u = \dfrac{\pi}{2} + k\pi$
- $\sin u = 1 \Leftrightarrow u = \dfrac{\pi}{2} + k2\pi (k \in \mathbb{Z})$ • $\cos u = 1 \Leftrightarrow u = k2\pi\ (k \in \mathbb{Z})$
- $\sin u = -1 \Leftrightarrow u = -\dfrac{\pi}{2} + k2\pi$ • $\cos u = -1 \Leftrightarrow u = \pi + k2\pi$

Chú ý: $\sin u \neq 0 \Leftrightarrow \cos u \neq \pm 1$

$\cos u \neq 0 \Leftrightarrow \sin u \neq \pm 1$

Bài 1. (Tuyển sinh Đại học khối D, năm 2002)

Tìm $x \in [0,14]$ nghiệm đúng phương trình

$$\cos 3x - 4\cos 2x + 3\cos x - 4 = 0 \quad (*)$$

Giải

Ta có (*): $\Leftrightarrow \left(4\cos^3 x - 3\cos x\right) - 4\left(2\cos^2 x - 1\right) + 3\cos x - 4 = 0$

$\Leftrightarrow 4\cos^3 x - 8\cos^2 x = 0 \quad \Leftrightarrow 4\cos^2 x(\cos x - 2) = 0$

$\Leftrightarrow \cos x = 0$ hay $\cos x = 2$ (loại vì $\cos x \leq 1$)

$\Leftrightarrow x = \dfrac{\pi}{2} + k\pi \quad (k \in \mathbb{Z})$

Ta có: $x \in [0,14] \Leftrightarrow 0 \leq \dfrac{\pi}{2} + k\pi \leq 14$

$$\Leftrightarrow -\frac{\pi}{2} \leq k\pi \leq 14 - \frac{\pi}{2} \Leftrightarrow -0,5 = -\frac{1}{2} \leq k \leq \frac{14}{\pi} - \frac{1}{2} \approx 3,9$$

Mà $k \in Z$ nên $k \in \{0, 1, 2, 3\}$. Do đó: $x \in \left\{\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}, \frac{5\pi}{2}, \frac{7\pi}{2}\right\}$. ■

Bài 2. (Tuyển sinh Đại học khối D, năm 2004)

Giải phương trình: $(2\cos x - 1)(2\sin x + \cos x) = \sin 2x - \sin x$ (*)

Giải

Ta có (*) $\Leftrightarrow (2\cos x - 1)(2\sin x + \cos x) = \sin x(2\cos x - 1)$

$$\Leftrightarrow (2\cos x - 1)\left[(2\sin x + \cos x) - \sin x\right] = 0$$

$$\Leftrightarrow (2\cos x - 1)(\sin x + \cos x) = 0$$

$$\Leftrightarrow \cos x = \frac{1}{2} \vee \sin x = -\cos x$$

$$\Leftrightarrow \cos x = \cos\frac{\pi}{3} \vee \tan x = -1 = \tan\left(-\frac{\pi}{4}\right)$$

$$\Leftrightarrow x = \pm\frac{\pi}{3} + k2\pi \vee x = -\frac{\pi}{4} + k\pi, (k \in Z).\ ■$$

Bài 3. Giải phương trình $\cos x + \cos 2x + \cos 3x + \cos 4x = 0$ (*)

Giải

Ta có (*) $\Leftrightarrow (\cos x + \cos 4x) + (\cos 2x + \cos 3x) = 0$

$$\Leftrightarrow 2\cos\frac{5x}{2}.\cos\frac{3x}{2} + 2\cos\frac{5x}{2}.\cos\frac{x}{2} = 0$$

$$\Leftrightarrow 2\cos\frac{5x}{2}\left(\cos\frac{3x}{2} + \cos\frac{x}{2}\right) = 0$$

$$\Leftrightarrow 4\cos\frac{5x}{2}\cos x\cos\frac{x}{2} = 0$$

$$\Leftrightarrow \cos\frac{5x}{2} = 0 \vee \cos x = 0 \vee \cos\frac{x}{2} = 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{5x}{2} = \frac{\pi}{2} + k\pi \vee x = \frac{\pi}{2} + k\pi \vee \frac{x}{2} = \frac{\pi}{2} + k\pi$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{\pi}{5} + \frac{2k\pi}{5} \vee x = \frac{\pi}{2} + k\pi \vee x = \pi + 2\pi, (k \in Z).\ ■$$

Bài 4. Giải phương trình $\sin^2 x + \sin^2 3x = \cos^2 2x + \cos^2 4x$ (*)

Giải

Ta có (*) $\Leftrightarrow \frac{1}{2}(1 - \cos 2x) + \frac{1}{2}(1 - \cos 6x) = \frac{1}{2}(1 + \cos 4x) + \frac{1}{2}(1 + \cos 8x)$

$$\Leftrightarrow -(\cos 2x + \cos 6x) = \cos 4x + \cos 8x$$

$$\Leftrightarrow -2\cos 4x\cos 2x = 2\cos 6x\cos 2x$$

$$\Leftrightarrow 2\cos 2x(\cos 6x + \cos 4x) = 0$$

$$\Leftrightarrow 4\cos 2x\cos 5x\cos x = 0$$

$$\Leftrightarrow \cos 2x = 0 \vee \cos 5x = 0 \vee \cos x = 0$$

$$\Leftrightarrow 2x = \frac{\pi}{2} + k\pi \vee 5x\frac{\pi}{2} + k\pi \vee x = \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{\pi}{4} + \frac{k\pi}{2} \vee x = \frac{\pi}{10} + \frac{k\pi}{5} \vee x = \frac{\pi}{2} + k\pi,\ k \in Z. \blacksquare$$

Bài 5. Giải phương trình

$$\sin x.\cos 4x - \sin^2 2x = 4\sin^2\left(\frac{\pi}{4} - \frac{x}{2}\right) - \frac{7}{2} \quad (*)$$

Giải

Ta có: (*) $\Leftrightarrow \sin x.\cos 4x - \frac{1}{2}(1 - \cos 4x) = 2\left[1 - \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right)\right] - \frac{7}{2}$

$$\Leftrightarrow \sin x\cos 4x - \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos 4x = \frac{-3}{2} - 2\sin x$$

$$\Leftrightarrow \sin x\cos 4x + \frac{1}{2}\cos 4x + 1 + 2\sin x = 0$$

$$\Leftrightarrow \cos 4x\left(\sin x + \frac{1}{2}\right) + 2\left(\sin x + \frac{1}{2}\right) = 0$$

$$\Leftrightarrow (\cos 4x + 2)\left(\sin x + \frac{1}{2}\right) = 0$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \cos 4x = -2 \text{ (loại)} \\ \sin x = -\frac{1}{2} = \sin\left(-\frac{\pi}{6}\right) \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = -\frac{\pi}{6} + k2\pi \\ x = \frac{7\pi}{6} + 2h\pi \end{array}\right. . \blacksquare$$

Bài 6. (Tuyển sinh Đại học khối B năm 2007)

Giải phương trình: $2\sin^2 2x + \sin 7x - 1 = \sin x$ (*)

Giải

Ta có: (*) $\Leftrightarrow (1 - \cos4x) + \sin7x - \sin x - 1 = 0$

$\Leftrightarrow -\cos4x + 2\cos4x\sin3x = 0$

$\Leftrightarrow \cos4x(2\sin3x - 1) = 0$

$\Leftrightarrow \cos4x = 0 \vee \sin3x = \frac{1}{2}$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 4x = \frac{\pi}{2} + k\pi \\ 3x = \frac{\pi}{6} + k2\pi \\ 3x = \frac{5\pi}{6} + k2\pi \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \frac{\pi}{8} + \frac{k\pi}{4} \\ x = \frac{\pi}{18} + \frac{k2\pi}{3} \\ x = \frac{5\pi}{18} + \frac{k2\pi}{3} \end{array}\right. (k \in Z).■$$

Bài 7. Giải phương trình: $\sin^3x\cos3x + \cos^3x\sin3x = \sin^34x$ (*)

Giải

Ta có: (*) $\Leftrightarrow \sin^3x(4\cos^3x - 3\cos x) + \cos^3x(3\sin x - 4\sin^3x) = \sin^34x$

$\Leftrightarrow 4\sin^3x\cos^3x - 3\sin^3x\cos x + 3\sin x\cos^3x - 4\sin^3x\cos^3x = \sin^34x$

$\Leftrightarrow 3\sin x\cos x(\cos^2x - \sin^2x) = \sin^34x$

$\Leftrightarrow \frac{3}{2}\sin2x\cos2x = \sin^34x \Leftrightarrow \frac{3}{4}\sin4x = \sin^34x$

$\Leftrightarrow 3\sin4x - 4\sin^34x = 0 \Leftrightarrow \sin12x = 0$

$\Leftrightarrow 12x = k\pi \Leftrightarrow x = \frac{k\pi}{12}$ $(k \in Z)$.■

Bài 8. (Tuyển sinh Đại học khối B, năm 2002)
Giải phương trình: $\sin^23x - \cos^24x = \sin^25x - \cos^26x$ (*)

Giải

Ta có: (*) $\Leftrightarrow \frac{1}{2}(1 - \cos6x) - \frac{1}{2}(1 + \cos8x) = \frac{1}{2}(1 - \cos10x) - \frac{1}{2}(1 + \cos12x)$

$\Leftrightarrow \cos6x + \cos8x = \cos10x + \cos12x$

$\Leftrightarrow 2\cos7x\cos x = 2\cos11x\cos x$

$\Leftrightarrow 2\cos x(\cos7x - \cos11x) = 0$

$$\Leftrightarrow \cos x = 0 \vee \cos 7x = \cos 11x$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2} + k\pi \vee 7x = \pm 11x + k2\pi$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2} + k\pi \vee x = -\frac{k\pi}{2} \vee x = \frac{k\pi}{9}, k \in \mathbb{Z}.\ ■$$

Bài 9. Giải phương trình

$$(\sin x + \sin 3x) + \sin 2x = (\cos x + \cos 3x) + \cos 2x \quad (*)$$

Giải

Ta có: (*) $\Leftrightarrow 2\sin 2x\cos x + \sin 2x = 2\cos 2x\cos x + \cos 2x$

$$\Leftrightarrow \sin 2x(2\cos x + 1) \quad \cos 2x(2\cos x + 1)$$

$$\Leftrightarrow (2\cos x + 1)(\sin 2x - \cos 2x) = 0$$

$$\Leftrightarrow \cos x = \frac{-1}{2} = \cos\frac{2\pi}{3} \vee \sin 2x = \cos 2x$$

$$\Leftrightarrow x = \pm\frac{2\pi}{3} + k2\pi \vee \mathrm{tg}2x = 1 = \mathrm{tg}\frac{\pi}{4}$$

$$\Leftrightarrow x = \pm\frac{2\pi}{3} + k2\pi \vee x = \frac{\pi}{8} + k\frac{\pi}{2}, (k \in Z).\ ■$$

Bài 10. Giải phương trình

$$\cos 10x + 2\cos^2 4x + 6\cos 3x.\cos x = \cos x + 8\cos x.\cos^3 3x(*)$$

Giải

Ta có: (*) $\Leftrightarrow \cos 10x + (1 + \cos 8x) = \cos x + 2\cos x(4\cos^3 3x - 3\cos 3x)$

$$\Leftrightarrow (\cos 10x + \cos 8x) + 1 = \cos x + 2\cos x.\cos 9x$$

$$\Leftrightarrow 2\cos 9x\cos x + 1 = \cos x + 2\cos x.\cos 9x$$

$$\Leftrightarrow \cos x = 1 \Leftrightarrow x = k2\pi\ (k \in Z).\ ■$$

Bài 11. (Tuyển sinh đại học khối A, 2007)

Giải phương trình: $(1 + \sin^2 x)\cos x + (1 + \cos^2 x)\sin x = 1 + \sin 2x$ (*)

Giải

Ta có: (*) $\Leftrightarrow \cos x + \sin^2 x\cos x + \sin x + \sin x\cos^2 x$

$$= \sin^2 x + \cos^2 x + 2\sin x\cos x$$

$$\Leftrightarrow \sin x + \cos x + \sin x\cos x(\sin x + \cos x) = (\sin x + \cos x)^2$$

$$\Leftrightarrow (\sin x + \cos x)(1 + \sin x\cos x) = (\sin x + \cos x)^2$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\sin x + \cos x = 0\\ 1 + \sin x\cos x = \sin x + \cos x\end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\sin x + \cos x = 0\\ 1 - \sin x - \cos x(1 - \sin x) = 0\end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\sin x = -\cos x\\ (1 - \sin x)(1 - \cos x) = 0\end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \tan x = -1 \vee \sin x = 1 \vee \cos x = 1$$

$$\Leftrightarrow x = -\frac{\pi}{4} + k\pi \vee x = \frac{\pi}{2} + k2\pi \vee x = k2\pi\ (k \in \mathbb{Z})\ .\ \blacksquare$$

Bài 12. (Đề dự bị khối A, 2006)

Giải phương trình: $\cos 3x.\cos^3 x - \sin^3 x = \dfrac{2 + 3\sqrt{2}}{8}$

Giải

Ta có: (*) $\Leftrightarrow \cos 3x\left(\dfrac{\cos 3x + 3\cos x}{4}\right) - \sin 3x\left(\dfrac{3\sin x - \sin 3x}{4}\right) = \dfrac{2 + \sqrt{2}}{8}$

$$\Leftrightarrow \cos^2 3x + 3\cos 3x\cos x - 3\sin 3x\sin x + \sin^2 3x = \frac{2 + \sqrt{2}}{2}$$

$$\Leftrightarrow (\sin^2 3x + \cos^2 3x) + 3(\cos 3x\cos x - \sin 3x\sin x) = 1 + \frac{3\sqrt{2}}{2}$$

$$\Leftrightarrow 3\cos(3x + x) = \frac{3\sqrt{2}}{2} \Leftrightarrow \cos 4x = \cos\frac{\pi}{4}$$

$$\Leftrightarrow 4x = \pm\frac{\pi}{4} + k2\pi \Leftrightarrow x = \pm\frac{\pi}{16} + \frac{k\pi}{2}\ (k \in \mathbb{Z})\ .\ \blacksquare$$

Bài 13. Giải phương trình $4\sin^3 x + 3\cos^3 x - 3\sin x - \sin^2 x\cos x = 0$ (*)

Giải

Ta có: (*) $\Leftrightarrow \sin x(4\sin^2 x - 3) - \cos x(\sin^2 x - 3\cos^2 x) = 0$

$$\Leftrightarrow \sin x(4\sin^2 x - 3) - \cos x\left[\sin^2 x - 3(1 - \sin^2 x)\right] = 0$$

$$\Leftrightarrow (4\sin^2 x - 3)(\sin x - \cos x) = 0$$

$$\Leftrightarrow [2(1 - \cos 2x) - 3](\sin x - \cos x) = 0$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \cos 2x = -\dfrac{1}{2} \\ \sin x = \cos x \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 2x = \pm\dfrac{2\pi}{3} + k2\pi \\ \tan x = 1 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \pm\dfrac{\pi}{3} + k\pi \\ x = \dfrac{\pi}{4} + k\pi \end{array}\right. \quad (k \in Z).\ \blacksquare$$

Bài 14. (Đề thi tuyển sinh Đại học khối B, 2005)

Giải phương trình: $\sin x + \cos x + 1 + \sin 2x + \cos 2x = 0$ (*)

Giải

Ta có: (*) $\Leftrightarrow \sin x + \cos x + 2\sin x\cos x + 2\cos^2 x = 0$

$$\Leftrightarrow (\sin x + \cos x) + 2\cos x(\sin x + \cos x) = 0$$

$$\Leftrightarrow (\sin x + \cos x)(1 + 2\cos x) = 0$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \sin x - \cos x = 0 \\ \cos 2x = -\dfrac{1}{2} = \cos\dfrac{2\pi}{3} \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \tan x = -1 \\ x = \pm\dfrac{2\pi}{3} + k2\pi \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = -\dfrac{\pi}{4} + k\pi \\ x = \pm\dfrac{2\pi}{3} + k2\pi \end{array}\right. \quad (k \in Z).\ \blacksquare$$

Bài 15. Giải phương trình

$(2\sin x + 1)(3\cos 4x + 2\sin x - 4) + 4\cos^2 x = 3$(*)

Giải

Ta có: (*) $\Leftrightarrow (2\sin x + 1)(3\cos 4x + 2\sin x - 4) + 4(1 - \sin^2 x) - 3 = 0$

$$\Leftrightarrow (2\sin x + 1)(3\cos 4x + 2\sin x - 4) + (1 + 2\sin x)(1 - 2\sin x) = 0$$

$$\Leftrightarrow (2\sin x + 1)[3\cos 4x + 2\sin x - 4 + (1 - 2\sin x)] = 0$$

$$\Leftrightarrow 3(\cos 4x - 1)(2\sin x + 1) = 0$$

$$\Leftrightarrow \cos 4x = 1 \vee \sin x = -\frac{1}{2} = \sin\left(-\frac{\pi}{6}\right)$$

$$\Leftrightarrow 4x = k2\pi \vee x = -\frac{\pi}{6} + k2\pi \vee x = \frac{7\pi}{6} + k2\pi$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{k\pi}{2} \vee x = -\frac{\pi}{6} + k2\pi \vee x = \frac{7\pi}{6} + k2\pi, (k \in Z).\ \blacksquare$$

Bài 16. Giải phương trình: $\sin^6x + \cos^6x = 2(\sin^8x + \cos^8x)$ (*)

Giải

Ta có: (*) $\Leftrightarrow \sin^6x - 2\sin^8x + \cos^6x - 2\cos^8x = 0$

$\Leftrightarrow \sin^6x(1 - 2\sin^2x) - \cos^6x(2\cos^2x - 1) = 0$

$\Leftrightarrow \sin^6x\cos2x - \cos^6x.\cos2x = 0$

$\Leftrightarrow \cos2x(\sin^6x - \cos^6x) = 0$

$\Leftrightarrow \cos2x = 0 \vee \sin^6x = \cos^6x$

$\Leftrightarrow \cos2x = 0 \vee \tan^6x = 1$

$\Leftrightarrow 2x = (2k + 1)\frac{\pi}{2} \vee \tan x = \pm1$

$\Leftrightarrow x = (2k + 1)\frac{\pi}{4} \vee x = \pm\frac{\pi}{4} + k\pi$

$\Leftrightarrow x = \frac{\pi}{4} + \frac{k\pi}{2}$, $k \in Z$. ■

Bài 17. Giải phương trình: $\cos x.\cos2x.\cos4x.\cos8x = \frac{1}{16}$ (*)

Giải

Ta thấy $x = k\pi$ không là nghiệm của (*) vì lúc đó

$\cos x = \pm1$, $\cos2x = \cos4x = \cos8x = 1$

(*) trở thành: $\pm1 = \frac{1}{16}$ vô nghiệm

Nhân 2 vế của (*) cho $16\sin x \neq 0$ ta được

(*) $\Leftrightarrow (16\sin x\cos x)\cos2x.\cos4x.\cos8x = \sin x$ và $\sin x \neq 0$

$\Leftrightarrow (8\sin2x\cos2x)\cos4x.\cos8x = \sin x$ và $\sin x \neq 0$

$\Leftrightarrow 2\sin8x\cos8x = \sin x$ và $\sin x \neq 0$

$\Leftrightarrow \sin6x = \sin x$ và $\sin x \neq 0$

$\Leftrightarrow x = \frac{k2\pi}{15} \vee x = \frac{\pi}{17} + \frac{k\pi}{17}$, $(k \in Z)$

Do: $x = h\pi$ không là nghiệm nên $k \in 15m$ và $2k + 1 \neq 17n$ $(n, m \in Z)$. ■

Bài 18. Giải phương trình $8\cos^3\left(x + \frac{\pi}{3}\right) = \cos3x$ (*)

Giải

Đặt $t = x + \frac{\pi}{3} \Leftrightarrow x = t - \frac{\pi}{3}$

Thì $\cos 3x = \cos(3t - \pi) = \cos(\pi - 3t) = -\cos 3t$

Vậy (*) thành $8\cos^3 t = -\cos 3t \Leftrightarrow 8\cos^3 t + 4\cos^3 t - 3\cos t = 0$

$$\Leftrightarrow 12\cos^3 t - 3\cos t = 0 \Leftrightarrow 3\cos t(4\cos^2 t - 1) = 0$$

$$\Leftrightarrow 3\cos t[2(1 + \cos 2t) - 1] = 0 \Leftrightarrow \cos t(2\cos 2t + 1) = 0$$

$$\Leftrightarrow \cos t = 0 \vee \cos 2t = -\frac{1}{2} = \cos\frac{2\pi}{3}$$

$$\Leftrightarrow t = (2k + 1)\frac{\pi}{2} \vee 2t = \pm\frac{2\pi}{3} + k2\pi$$

$$\Leftrightarrow t = \frac{\pi}{2} + k\pi \vee t = \pm\frac{\pi}{3} + k\pi$$

Mà $x = t - \frac{\pi}{3}$

Vậy (*) $\Leftrightarrow x = \frac{\pi}{6} + k2\pi \vee x\ k\pi \vee x = \frac{2\pi}{3} + k\pi$, (với $k \in Z$) . ■

Chú ý:

Khi giải các phương trình lượng giác có chứa tanu, cotu, có ẩn ở mẫu, hay chứa căn bậc chẵn... ta phải đặt điều kiện để phương trình xác định. Ta sẽ dùng các cách sau đây để kiểm tra điều kiện xem có nhận nghiệm hay không:

Cách 1: + Thay các giá trị x tìm được vào điều kiện thử lại xem có thỏa.

Cách 2: + Biểu diễn các ngọn cung điều kiện và các ngọn cung tìm được trên cùng một đường tròn lượng giác. Ta sẽ loại bỏ ngọn cung của nghiệm khi có trùng với ngọn cung của điều kiện.

Cách 3: + So với các điều kiện trong quá trình giải phương trình.

Bài 19. Giải phương trình $\tan^2 x - \tan x.\tan 3x = 2$(*)

Giải

Điều kiện $\begin{cases} \cos x \neq 0 \\ \cos 3x = 4\cos^3 x - 3\cos x \neq 0 \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \cos 3x \neq 0 \Leftrightarrow x \neq \frac{\pi}{6} + \frac{hx}{3}$$

Lúc đó ta có (*) ⇔ tanx(tanx − tan3x) = 2

$$\Leftrightarrow \frac{\sin x}{\cos x}\left(\frac{\sin x}{\cos x} - \frac{\sin 3x}{\cos 3x}\right) = 2$$

$$\Leftrightarrow \sin x(\sin x\cos 3x - \cos x\sin 3x) = 2\cos^2 x\cos 3x$$

$$\Leftrightarrow \sin x\sin(-2x) = 2\cos^2 x\cos 3x$$

$$\Leftrightarrow -2\sin^2 x\cos x = 2\cos^2 x\cos 3x$$

$$\Leftrightarrow -\sin^2 x = \cos x\cos 3x \text{ (do } \cos x \neq 0)$$

$$\Leftrightarrow -\frac{1}{2}(1 - \cos 2x) = \frac{1}{2}(\cos 4x + \cos 2x)$$

$$\Leftrightarrow \cos 4x = -1 \Leftrightarrow 4x = \pi + k2\pi$$

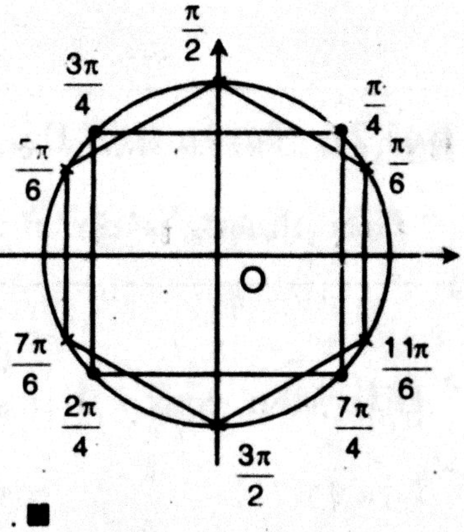
$$\Leftrightarrow x = \frac{\pi}{4} + \frac{k\pi}{2} \quad (k \in Z)$$

So với điều kiện

Cách 1: Khi $x = \frac{\pi}{4} + \frac{k\pi}{2}$ thì $\cos\left(\frac{3\pi}{4} + \frac{3k\pi}{2}\right) = \pm\frac{\sqrt{2}}{2} \neq 0$ (nhận)

Cách 2: Biểu diễn các ngọn cung điều kiện và ngọn cung nghiệm ta thấy không có ngọn cung nào trùng nhau. Do đó:

$$(*) \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{4} + \frac{k\pi}{2}$$



Lưu ý cách 2 rất mất thời gian

Cách 3:

Nếu $3x = \frac{3\pi}{4} + \frac{3k\pi}{2} = \frac{\pi}{2} + h\pi$

Thì $3 + 6k = 2 + 4h$

$\Leftrightarrow 1 = 4h - 6k$

$\Leftrightarrow \frac{1}{2} = 2h - 3k$ (vô lí vì k, h ∈ Z) . ■

Bài 20. Giải phương trình: $\tan^2 x + \cot^2 x + \cot^2 2x = \frac{11}{3}$ (*)

Giải

Điều kiện $\begin{cases} \cos x \neq 0 \\ \sin x \neq 0 \Leftrightarrow \sin 2x \neq 0 \\ \sin 2x \neq 0 \end{cases}$

Do đó: (*) $\Leftrightarrow \left(\dfrac{1}{\cos^2 x} - 1\right) + \left(\dfrac{1}{\sin^2 x} - 1\right) + \left(\dfrac{1}{\sin^2 2x} - 1\right) = \dfrac{11}{3}$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{\cos^2 x} + \frac{1}{\sin^2 x} + \frac{1}{4\sin^2 x\cos^2 x} = \frac{20}{3}$$

$$\Leftrightarrow \frac{4\sin^2 x + 4\cos^2 x + 1}{4\sin^2 x\cos^2 x} = \frac{20}{3} \Leftrightarrow \frac{5}{\sin^2 2x} = \frac{20}{3}$$

$$\Leftrightarrow \sin^2 2x = \frac{3}{4} \text{ (nhận so } \sin 2x \neq 0)$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{2}(1 - \cos 4x) = \frac{3}{4} \Leftrightarrow \cos 4x = -\frac{1}{2} = \cos\frac{2\pi}{3}$$

$$\Leftrightarrow 4x = \in \frac{2\pi}{3} + k2\pi \Leftrightarrow x = \pm\frac{\pi}{6} + \frac{k\pi}{2} \ (k \in Z).\ \blacksquare$$

Chú ý: Có thể dễ dàng chứng minh: $\tan x + \cot x = \dfrac{2}{\sin 2x}$

Vậy (*) $\Leftrightarrow (\tan x + \cot x)^2 - 2 + \left(\dfrac{1}{\sin^2 x} - 1\right) = \dfrac{11}{3}$

$$\Leftrightarrow \frac{5}{\sin^2 2x} = \frac{20}{3}$$

Bài 21. (Tuyển sinh Đại học khối D, năm 2003)

Giải phương trình: $\sin^2\left(\dfrac{x}{2} - \dfrac{\pi}{4}\right)\tan^2 x - \cos^2\dfrac{x}{2} = 0$ (*)

Giải

Điều kiện; $\cos x \neq 0 \Leftrightarrow \sin x \neq \pm 1$

Lúc đó: (*) $\Leftrightarrow \dfrac{1}{2}\left[1 - \cos\left(x - \dfrac{\pi}{2}\right)\right]\dfrac{\sin^2 x}{\cos^2 x} - \dfrac{1}{2}[1 + \cos x] = 0$

$$\Leftrightarrow \frac{(1 - \sin x)(1 - \cos^2 x)}{1 - \sin^2 x} - (1 + \cos x) = 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{1 - \cos^2 x}{1 + \sin x} - (1 + \cos x) = 0 \text{ (do } \sin x \neq -1)$$

$$\Leftrightarrow (1+\cos x)\left[\frac{1-\cos x}{1+\sin x}-1\right]=0$$

$$\Leftrightarrow (1+\cos x)(-\cos x-\sin x)=0$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\cos x=-1 \text{ (nhận do } \cos x\neq 0)\\ \tan x=-1\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=\pi+k2\pi\\ x=-\dfrac{\pi}{4}+k\pi\end{array}\right. .\blacksquare$$

Bài 22. Giải phương trình: $\sin 2x(\cot x+\tan 2x)=4\cos^2 x$ (*)

Giải

Điều kiện: $\begin{cases}\sin x\neq 0\\ \cos 2x\neq 0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}\sin x\neq 0\\ 2\cos^2 x-1\neq 0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}\cos x\neq \pm 1\\ \cos x\neq \pm\dfrac{\sqrt{2}}{2}\end{cases}$

Ta có: $\cot x+\tan 2x=\dfrac{\cos x}{\sin x}+\dfrac{\sin 2x}{\cos 2x}$

$$=\frac{\cos 2x\cos x+\sin 2x\sin x}{\sin x\cos 2x}=\frac{\cos x}{\sin x\cos 2x}$$

Lúc đó: (*) $\Leftrightarrow 2\sin x\cos x\left(\dfrac{\cos x}{\sin x\cos 2x}\right)=4\cos^2 x$

$$\Leftrightarrow \frac{2\cos^2 x}{\cos 2x}=4\cos^2 x \text{ (Do } \sin x\neq 0)$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\cos x=0\\ \dfrac{1}{\cos 2x}=2\end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\cos x=0\left(\text{Nhận do } \cos x\neq \dfrac{\sqrt{2}}{2} \text{ và } \neq 1\right)\\ \cos 2x=\dfrac{1}{2}=\cos\dfrac{\pi}{3} \text{ (nhận do } \sin x\neq 0 \text{ và } \cos 2x\neq 0)\end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=\dfrac{\pi}{2}+k\pi\\ x=\pm\dfrac{\pi}{6}+k\pi\end{array}\right. \quad (k\in\mathbb{Z}).\blacksquare$$

Bài 23 Giải phương trình: $\dfrac{\cot^2 x-\tan^2 x}{\cos 2x}=16(1+\cos 4x)$ (*)

Giải

Ta có: $\cot^2x - \tan^2x = \dfrac{\cos^2x}{\sin^2x} - \dfrac{\sin^2x}{\cos^2x} = \dfrac{\cos^4x - \sin^4x}{\sin^2x\cos^2x} = \dfrac{4\cos2x}{\sin^22x}$

Điều kiện: $\begin{cases}\sin2x \neq 0\\ \cos2x \neq 0\end{cases} \Leftrightarrow \sin4x \neq 0$

Lúc đó (*) $\Leftrightarrow \dfrac{4}{\sin^22x} = 16(1 + \cos4x)$

$\Leftrightarrow 1 = 4(1 + \cos4x)\sin^22x$

$\Leftrightarrow 1 = 2(1 + \cos4x)(1 - \cos4x)$

$\Leftrightarrow 1 = 2(1 - \cos^24x) = 2\sin^24x$

$\Leftrightarrow \sin^24x = \dfrac{1}{2}$ (nhận do $\sin4x \neq 0$)

$\Leftrightarrow \dfrac{1}{2}(1 - \cos8x) = \dfrac{1}{2}$

$\Leftrightarrow \cos8x = 0 \Leftrightarrow x = \dfrac{\pi}{16} + \dfrac{k\pi}{8}, k \in \mathbb{Z}.$ ■

Bài 24. Giải phương trình:

$$\sin^4x + \cos^4x = \frac{7}{8}\cot\left(x + \frac{\pi}{3}\right)\cot\left(\frac{\pi}{6} - x\right) \quad (*)$$

Giải

Điều kiện $\begin{cases}\sin\left(x + \dfrac{\pi}{3}\right) \neq 0\\ \sin\left(\dfrac{\pi}{6} - x\right) \neq 0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}\sin\left(x + \dfrac{\pi}{3}\right) \neq 0\\ \cos\left(x + \dfrac{\pi}{3}\right) \neq 0\end{cases} \Leftrightarrow \left(2x + \dfrac{2\pi}{3}\right) \quad 0$

$\Leftrightarrow -\dfrac{1}{2}\sin2x + \dfrac{\sqrt{3}}{2}\cos2x \neq 0 \Leftrightarrow \tan2x \neq \sqrt{3}$

Ta có: $\sin^4x + \cos^4x = (\sin^2x + \cos^2x)^2 - 2\sin^2x.\cos^2x = 1 - \dfrac{1}{2}\sin^22x$

Và: $\cot\left(x + \dfrac{\pi}{3}\right).\cot\left(\dfrac{\pi}{6} - x\right) = \cot\left(x + \dfrac{\pi}{3}\right).\tan\left(\dfrac{\pi}{3} + x\right) = 1$

Lúc đó: (*) $\Leftrightarrow 1 - \dfrac{1}{2}\sin^22x = \dfrac{7}{8}$

$$\Leftrightarrow -\frac{1}{4}(1 - \cos 4x) = -\frac{1}{8} \Leftrightarrow \cos 4x = \frac{1}{2}$$

$$\Leftrightarrow 4x = \pm\frac{\pi}{3} + k2\pi \Leftrightarrow x = \pm\frac{\pi}{12} + \frac{k\pi}{2}\ (k \in \mathbb{Z})$$

(nhận do $\tan 2x = \pm\frac{\sqrt{3}}{3} \neq \sqrt{3}$). ■

Bài 25. Giải phương trình $2\tan x + \cot 2x = 2\sin 2x + \frac{1}{\sin 2x}$ (*)

Giải

Điều kiện: $\sin 2x \neq 0 \Leftrightarrow \cos 2x \neq \pm 1$

Lúc đó: (*) $\Leftrightarrow \frac{2\sin x}{\cos x} + \frac{\cos 2x}{\sin 2x} = 2\sin 2x + \frac{1}{\sin 2x}$

$$\Leftrightarrow 4\sin^2 x + \cos 2x = 2\sin^2 2x + 1$$

$$\Leftrightarrow 4\sin^2 x + (1 - 2\sin^2 x) = 8\sin^2 x\cos^2 x + 1$$

$$\Leftrightarrow 2\sin^2 x(1 - 4\cos^2 x) = 0$$

$$\Leftrightarrow 2\sin^2 x[1 - 2(1 + \cos 2x)] = 0$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \sin x = 0 \text{ (loại do } \sin 2x \neq 0 \Rightarrow \sin x \neq 0) \\ \cos 2x = -\frac{1}{2} = \cos\frac{2\pi}{3} \text{ (nhận do } \cos 2x \neq \pm 1) \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow 2x + \pm\frac{2\pi}{3} + k2\pi\ (k \in \mathbb{Z})$$

$$\Leftrightarrow x = \pm\frac{\pi}{3} + k\pi,\ k \in \mathbb{Z}.$$ ■

Bài 26. (Tuyển sinh Đại học khối B năm 2006)

Giải phương trình: $\cot x + \sin x(1 + \tan x.\tan\frac{x}{2}) = 4$ (*)

Giải

Điều kiện: $\begin{cases} \sin x \neq 0 \\ \cos x \neq 0 \Leftrightarrow \sin 2x \neq 0 \\ \cos\frac{x}{2} \neq 0 \end{cases}$

Ta có: $1 + \tan x.\tan\frac{x}{2} = 1 + \frac{\sin x}{\cos x}.\frac{\sin\frac{x}{2}}{\cos\frac{x}{2}}$

$$= \frac{\cos x\cos\frac{x}{2} + \sin x\sin\frac{x}{2}}{\cos x.\cos\frac{x}{2}} = \frac{\cos(x - \frac{x}{2})}{\cos x\cos\frac{x}{2}} = \frac{1}{\cos x}$$

Vậy: $(*) \Leftrightarrow \frac{\cos x}{\sin x} + \frac{\sin x}{\cos x} = 4 \Leftrightarrow \cos^2x + \sin^2x = 4\sin x\cos x$

$\Leftrightarrow \frac{1}{2} = \sin 2x$ (nhận so điều kiện $\sin 2x \neq 0$)

$\Leftrightarrow 2x = \frac{\pi}{6} + k2\pi \vee 2x = \frac{5\pi}{6} + k2\pi$

$\Leftrightarrow x = \frac{\pi}{12} + k\pi \vee x = \frac{5\pi}{12} + k\pi\ (k \in Z)$. ■

Bài 27. (Dự bị khối D năm 2005)

Giải phương trình: $\tan\left(\frac{3\pi}{2} - x\right) + \frac{\sin x}{1 + \cos x} = 2\ (*)$

Giải

Ta có: $(*) \Leftrightarrow \tan(\frac{\pi}{2} - x) + \frac{\sin x}{1 + \cos x} = 2$

$\Leftrightarrow \frac{\cos x}{\sin x} + \frac{\sin x}{1 + \cos x} = 2$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \sin x \neq 0 \wedge \cos x - 1 \\ \cos x(1 + \cos x) + \sin^2x = 2\sin x(1 + \cos x) \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \cos x \neq \pm 1 \\ 1 + \cos x = 2\sin x(1 + \cos x) \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \cos x \neq \pm 1 \\ 1 = 2\sin x \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \sin x \neq 0 \\ \sin x = \frac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \sin x = \frac{1}{2}$$

$\Leftrightarrow x = \frac{\pi}{6} + k2\pi \vee x = \frac{5\pi}{6} + k2\pi\ (k \in Z)$. ■

Bài 28. Giải phương trình: $\dfrac{3(\sin x + \tan x)}{\tan x - \sin x} - 2(1 + \cos x) = 0(*)$

Giải

Điều kiện: $\tan x - \sin x \neq 0$ và $\dfrac{\sin x}{\cos x} - \sin x \neq 0$

$$\Leftrightarrow \frac{\sin x(1 - \cos x)}{\cos x} \neq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \sin x \neq 0 \\ \cos x \neq 0 \Leftrightarrow \sin 2x \neq 0 \\ \cos x \neq 1 \end{cases}$$

Lúc đó $(*) \Leftrightarrow \dfrac{3(\sin x + \tan x).\cot x}{(\tan x - \sin x).\cot x} - 2(1 + \cos x) = 0$

$$\Leftrightarrow \frac{3(\cos x + 1)}{(1 - \cos x)} - 2(1 + \cos x) = 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{3}{1 - \cos x} - 2 = 0 \text{ (do } \sin x \neq 0 \text{ nên } \cos x + 1 \neq 0)$$

$$\Leftrightarrow 1 + 2\cos x = 0$$

$$\Leftrightarrow \cos x = -\frac{1}{2} \text{ (nhận so với điều kiện)}$$

$$\Leftrightarrow x = \pm\frac{2\pi}{3} + k2\pi, k \in \mathbb{Z}. \blacksquare$$

Bài 29. Giải phương trình:

$$\frac{(1 - \cos x)^2 + (1 + \cos x)^2}{4(1 - \sin x)} - \tan^2 x \sin x = \frac{1}{2}(1 + \sin x) + \tan^2 x \ (*)$$

Giải

Điều kiện: $\begin{cases} \cos x \neq 0 \\ \sin x \neq 1 \end{cases} \Leftrightarrow \cos x \neq 0$

Lúc đó $(*) \Leftrightarrow \dfrac{2(1 + \cos^2 x)}{4(1 - \sin x)} - \dfrac{\sin^3 x}{1 - \sin^2 x} = \dfrac{1}{2}(1 + \sin x) + \dfrac{\sin^2 x}{1 - \sin^2 x}$

$$\Leftrightarrow (1 + \cos^2 x)(1 + \sin x) - 2\sin^3 x = (1 + \sin x)(1 - \sin^2 x) + 2\sin^2 x$$

$$\Leftrightarrow (1 + \sin x)(1 + \cos^2 x) = (1 + \sin x)\cos^2 x + 2\sin^2 x(1 + \sin x)$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 1 + \sin x = 0 \\ 1 + \cos^2 x = \cos^2 x + 2\sin^2 x \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\sin x = -1 \text{ (loại do } \cos x \neq 0)\\ 1 = 1 - \cos 2x\end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \cos 2x = 0 \Leftrightarrow 2x = \frac{\pi}{2} + k\pi$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{\pi}{4} + k\frac{\pi}{2} \text{ (nhận do } \cos x \neq 0) \ (k \in Z). \blacksquare$$

Bài 30. Giải phương trình: $\cos 3x.\tan 5x = \sin 7x$ (*)

Giải

Điều kiện $\cos 5x \neq 0$

Lúc đó: (*) $\Leftrightarrow \cos 3x.\dfrac{\sin 5x}{\cos 5x} = \sin 7x$

$$\Leftrightarrow \sin 5x.\cos 3x = \sin 7x.\cos 5x$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{2}[\sin 8x + \sin 2x] = \frac{1}{2}[\sin 12x + \sin 2x]$$

$$\Leftrightarrow \sin 8x = \sin 12x$$

$$\Leftrightarrow 12x = 8x + k2\pi \vee 12x = \pi - 8x + k2\pi$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{k\pi}{2} \vee x = \frac{\pi}{20} + \frac{k\pi}{10}$$

So lại với điều kiện

$x = \dfrac{k\pi}{2}$ thì $\cos 5x = \cos\dfrac{5k\pi}{2} = \cos\dfrac{k\pi}{2}$ (loại nếu k lẻ)

$x = \dfrac{\pi}{20} + \dfrac{k\pi}{10}$ thì $\cos 5x = \cos\left(\dfrac{\pi}{4} + \dfrac{k\pi}{2}\right) \neq 0$ nhận

Do đó: (*) $\Leftrightarrow x = h\pi \vee x = \dfrac{\pi}{20} + \dfrac{k\pi}{10}$, với k, h $\in Z$. $\blacksquare$

Bài 31. Giải phương trình: $\dfrac{\sin^4 x + \cos^4 x}{\sin 2x} = \dfrac{1}{2}(\tan x + \cot 2x)$ (*)

Giải

Điều kiện: $\sin 2x \neq 0$

Ta có: $\sin^4 x + \cos^4 x = (\sin^2 x + \cos^2 x)^2 - 2\sin^2 x\cos^2 x = 1 - \dfrac{1}{2}\sin^2 2x$

Ta có: $\tan x + \cot 2x = \dfrac{\sin x}{\cos x} + \dfrac{\cos 2x}{\sin 2x}$

$$= \frac{\sin 2x \sin x + \cos x \cos 2x}{\cos x \sin 2x} = \frac{\cos(2x - x)}{\cos x \sin 2x} = \frac{1}{\sin 2x}$$

Do đó: (*) $\Leftrightarrow \dfrac{1 - \frac{1}{2}\sin^2 2x}{\sin 2x} = \dfrac{1}{\sin 2x} \Leftrightarrow 1 - \dfrac{1}{2}\sin^2 2x = \dfrac{1}{2}$

$\Leftrightarrow \sin^2 2x = 1$ (nhận do $\sin 2x \neq 0$)

$\Leftrightarrow \cos^2 2x = 0 \Leftrightarrow 2x = \dfrac{\pi}{2} + k\pi.\ k \in Z$

$\Leftrightarrow x = \dfrac{\pi}{4} + \dfrac{k\pi}{2},\ k \in Z.$ ■

BÀI TẬP TỰ GIẢI

Bài 1. Tìm các nghiệm trên $\left(\dfrac{\pi}{3}, 3\pi\right)$ của phương trình:

$$\sin\left(2x + \frac{5\pi}{2}\right) - 3\cos\left(x - \frac{7\pi}{2}\right) = 1 + 2\sin x$$

Bài 2. Tìm các nghiệm x trên $(0, \dfrac{\pi}{2})$ của phương trình:

$$\sin^2 4x - \cos^2 6x = \sin(10{,}5\pi + 10x)$$

Bài 3. Giải các phương trình sau:

a) $\sin^3 x + \cos^3 x = 2(\sin^5 x + \cos^5 x)$

b) $\dfrac{\cos^2 x(\cos x - 1)}{\sin x + \cos x} = 2(1 + \sin x)$

c) $\tan^2 x = \dfrac{1 + \cos x}{1 - \sin x}$

d) $\tan 2x - \tan 3x - \tan 5x = \tan 2x.\tan 3x.\tan 5x$

e) $\tan^4 x + 1 = \dfrac{(2 - \sin^2 2x)\sin 3x}{\cos^4 x}$

f) $2\sqrt{2}\sin\left(x + \dfrac{\pi}{4}\right) = \dfrac{1}{\sin x} + \dfrac{1}{\cos x}$

i) $2\tan x + \cot 2x = \sqrt{3} + \dfrac{2}{\sin 2x}$

h) $3\tan 3x + \cot 2x = 2\tan x + \dfrac{2}{\sin 4x}$

k) $\sin^2 x + \sin^2 2x + \sin^2 3x = 2$

l) $\dfrac{\sin 2x}{1 + \sin x} + 2\cos x = 0$

m) $\dfrac{1}{\cos x} - \dfrac{1}{\sin x} = \dfrac{2\sqrt{2}}{}\cos(x + \dfrac{\pi}{4})$

o) $(2\sin^2 x - 1)\tan^2 2x + 3(2\cos^2 x - 1) = 0$

p) $2\sin 3x\,(1 - 4\sin^2 x) = 1$

q) $\tan^2 x = \dfrac{1 + \cos x}{1 - \sin x}$

r) $\cos^3 x\cos 3x + \sin^3 x\sin 3x = \dfrac{\sqrt{2}}{4}$

s) $\cot x + \dfrac{\sin x}{1 + \cos x} = 2$

t) $\cos^3 x - 4\sin^3 x - 3\cos x\sin^2 x + \sin x = 0$

u) $3 - \tan x(\tan x + 2\sin x) + 6\cos x = 0$

v) $\sin\dfrac{4x}{2} + \cos\dfrac{4x}{2} = 1 - 2\sin x$

x) $\sin(3x - \dfrac{\pi}{4}) = \sin 2x.\sin\left(x + \dfrac{\pi}{4}\right)$

y) $\tan^4 x + 1 = \dfrac{(2 - \sin^2 x)\sin^3 x}{\cos^4 x}$

z) $\tan x + \cos x - \cos^2 x = \sin x\,(1 + \tan\dfrac{x}{2}\tan x)$

Bài 4. Cho phương trình:

$$(2\sin x - 1)(2\cos 2x + 2\sin x + m) = 3 - 4\cos^2 x \qquad (1)$$

a) Giải phương trình khi $m = 1$

b) Tìm m để (1) có 2 nghiệm trên $[0, \pi]$

II. Phương trình bậc hai với các hàm số lượng giác

$a\sin^2 u + b\sin u + c = 0\ (a \neq 0)$; $a\cos^2 u + b\cos u + c = 0\ (a \neq 0)$

$a\tan^2 u + b\tan u + c = 0\ (a \neq 0)$; $a\cot^2 u + b\cot u + c = 0\ (a \neq 0)$

Cách giải

Đặt: $t = \sin u$ hay $t = \cos u$ với $|t| \le 1$

Các phương trình trên thành: $at^2 + bt + c = 0$

Giải phương trình tìm được t, so với điều kiện để nhận nghiệm t.

Từ đó giải phương trình lượng giác cơ bản tìm được u.

Bài 32. (Tuyển sinh Đại học khối A, 2002)

Tìm các nghiệm trên $(0, 2\pi)$ của phương trình:

$$5\left(\sin x + \frac{\cos 3x + \sin 3x}{1 + 2\sin 2x}\right) = 3 + \cos 2x \ (*)$$

Giải

Điều kiện: $\sin 2x \ne -\frac{1}{2}$

Ta có: $\sin 3x + \cos 3x = (3\sin x - 4\sin^3 x) + (4\cos^3 x - 3\cos x)$

$$= -3(\cos x - \sin x) + 4(\cos^3 x - \sin^3 x)$$

$$= (\cos x - \sin x)[-3 + 4(\cos^2 x + \cos x\sin x + \sin^2 x)]$$

$$= (\cos x - \sin x)(1 + 2\sin 2x)$$

Lúc đó: $(*) \Leftrightarrow 5[\sin x + (\cos x - \sin x)] = 3 + (2\cos^2 x - 1)$ do $\sin 2x \ne -\frac{1}{2}$

$$\Leftrightarrow 2\cos^2 x - 5\cos x + 2 = 0$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \cos x = \frac{1}{2} \\ \cos x = 2 \text{ (loại)} \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow x = \pm\frac{\pi}{3} + k2\pi \text{ (nhận do } \sin 2x = \pm\frac{\sqrt{3}}{2} \ne -\frac{1}{2}\text{)}$$

Do $x \in (0, 2\pi)$ nên $x = \frac{\pi}{3} \vee x = \frac{5\pi}{3}$. ■

Bài 33. (Tuyển sinh Đại học khối A, 2005)

Giải phương trình: $\cos^2 3x.\cos 2x - \cos^2 x = 0$ (*)

Giải

Ta có: $(*) \Leftrightarrow \frac{1 + \cos 6x}{2}.\cos 2x - \frac{1 + \cos 2x}{2} = 0$

$$\Leftrightarrow \cos 6x.\cos 2x - 1 = 0 \qquad (**)$$

Cách 1: (**) $\Leftrightarrow (4\cos^3 2x - 3\cos 2x)\cos 2x - 1 = 0$

$$\Leftrightarrow 4\cos^4 2x - 3\cos^2 2x - 1 = 0$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\cos^2 2x = 1\\ \cos^2 2x = -\dfrac{1}{4}\ \text{(vô nghiệm)}\end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \sin 2x = 0 \Leftrightarrow 2x = k\pi \Leftrightarrow x = \frac{k\pi}{2}\ (k \in Z)$$

Cách 2: (**) $\Leftrightarrow \dfrac{1}{2}(\cos 8x + \cos 4x) - 1 = 0$

$$\Leftrightarrow \cos 8x + \cos 4x - 2 = 0$$

$$\Leftrightarrow 2\cos^2 4x + \cos 4x - 3 = 0$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\cos 4x = 1\\ \cos 4x = -\dfrac{3}{2}\ \text{(loại)}\end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow 4x = k2\pi \Leftrightarrow x = \frac{k\pi}{2}\ (k \in Z)$$

Cách 3: Phương trình lượng giác không mẫu mực

$$(**) \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\cos 6x = \cos 2x = 1\\ \cos 6x = \cos 2x = -1\end{array}\right.$$

Cách 4: $\cos 8x + \cos 4x - 2 = 0 \Leftrightarrow \cos 8x + \cos 4x = 2$

$\Leftrightarrow \cos 8x = \cos 4x = 1 \Leftrightarrow \cos 4x = 1.$ ■

Bài 34. (Tuyển sinh Đại học khối D, 2005)

Giải phương trình: $\cos^4 x + \sin^4 x + \cos\left(x - \dfrac{\pi}{4}\right)\sin\left(3x - \dfrac{\pi}{4}\right) - \dfrac{3}{2} = 0$ (*)

Giải

Ta có:

$$(*) \Leftrightarrow (\sin^2 x + \cos^2 x)^2 - 2\sin^2 x\cos^2 x + \frac{1}{2}\left[\sin\left(4x - \frac{\pi}{2}\right) + \sin 2x\right] - \frac{3}{2} = 0$$

$$\Leftrightarrow 1 - \frac{1}{2}\sin^2 2x + \frac{1}{2}[-\cos 4x + \sin 2x] - \frac{3}{2} = 0$$

$$\Leftrightarrow -\frac{1}{2}\sin^2 2x - \frac{1}{2}(1 - 2\sin^2 2x) + \frac{1}{2}\sin 2x - \frac{1}{2} = 0$$

$$\Leftrightarrow \sin^2 2x + \sin 2x - 2 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\sin 2x = 1\\ \sin 2x = -2 \text{ (loại)}\end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow 2x = \frac{\pi}{2} + k2\pi,\ k \in Z \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{4} + k\pi,\ k \in Z. \blacksquare$$

Bài 35. (Tuyển sinh Đại học khối B, 2004)

Giải phương trình: $5\sin x - 2 = 3(1 - \sin x)\tan^2 x$ (*)

Giải

Điều kiện: $\cos x \neq 0 \Leftrightarrow \sin x \neq \pm 1$

Khi đó (*) $\Leftrightarrow 5\sin x - 2 = 3(1 - \sin x)\dfrac{\sin^2 x}{\cos^2 x}$

$$\Leftrightarrow 5\sin x - 2 = 3(1 - \sin x)\frac{\sin^2 x}{1 - \sin^2 x}$$

$$\Leftrightarrow 5\sin x - 2 = \frac{3\sin^2 x}{1 + \sin x} \quad \text{(do } \sin x \neq 1\text{)}$$

$$\Leftrightarrow 2\sin^2 x + 3\sin x - 2 = 0$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\sin x = \dfrac{1}{2} \text{ (nhận so } \sin x \neq \pm 1\\ \sin x = -2 \text{ (vô nghiệm)}\end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{\pi}{6} + k2\pi \vee x = \frac{5\pi}{6} + k2\pi\ (k \in Z)\,. \blacksquare$$

Bài 36. Giải phương trình: $2\sin 3x - \dfrac{1}{\sin x} = 2\cos 3x + \dfrac{1}{\cos x}$ (*)

Giải

Điều kiện: $\sin 2x \neq 0$

Lúc đó: (*) $\Leftrightarrow 2(\sin 3x - \cos 3x) = \dfrac{1}{\sin x} + \dfrac{1}{\cos x}$

$$\Leftrightarrow 2\left[3(\sin x + \cos x) - 4(\sin 3x + \cos 3x)\right] = \frac{1}{\sin x} + \frac{1}{\cos x}$$

$$\Leftrightarrow 2(\sin x + \cos x)\left[3 - 4(\sin 2x - \sin x\cos x + \cos 2x)\right] = \frac{\sin x + \cos x}{\sin x\cos x}$$

$$\Leftrightarrow (\sin x + \cos x)\left[-2 + 8\sin x\cos x - \frac{1}{\sin x\cos x}\right] = 0$$

$$\Leftrightarrow (\sin x + \cos x)\left[4\sin 2x - \frac{2}{\sin 2x} - 2\right] = 0$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\sin x + \cos x = 0\\ 4\sin^2 2x - 2\sin 2x - 2 = 0\end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\tan x = -1\\ \sin 2x = 1 \vee \sin 2x = \dfrac{-1}{2}\end{array}\right. \text{(nhận so với điều kiện)}$$

$$\Leftrightarrow x = -\frac{\pi}{4} + k\pi \vee 2x = \frac{\pi}{2} + k2\pi \vee 2x = -\frac{\pi}{6} + k2\pi \vee 2x = \frac{7\pi}{3} + k2\pi,$$
$k \in Z$

$$\Leftrightarrow x = \pm\frac{\pi}{4} + k\pi \vee x = -\frac{\pi}{12} + k\pi \vee x = \frac{7\pi}{12} + k\pi,\ k \in Z.$$ ■

Bài 37. Giải phương trình: $\dfrac{\cos x(2\sin x + 3\sqrt{2}) - 2\cos^2 x - 1}{1 + \sin 2x} = 1$ (*)

Giải

Điều kiện: $\sin 2x \neq -1 \Leftrightarrow x \neq -\dfrac{\pi}{4} + m\pi$

Lúc đó: (*) $\Leftrightarrow 2\sin x\cos x + 3\sqrt{2}\cos x - 2\cos^2 x - 1 + \sin 2x$

$$\Leftrightarrow 2\cos^2 x - 3\sqrt{2}\cos x + 2 = 0$$

$$\Leftrightarrow \cos x = \frac{\sqrt{2}}{2} \text{ hay } \cos x = \sqrt{2} \text{ (vô nghiệm)}$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x = \dfrac{\pi}{4} + k2\pi\\ x = \dfrac{-\pi}{4} + k'2\pi \text{ (loại do điều kiện)}\end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{\pi}{4} + k2\pi\ (k \in Z)\ .$$ ■

Bài 38. Giải phương trình: $\cos x.\cos\dfrac{x}{2}.\cos\dfrac{3x}{2} - \sin x\sin\dfrac{x}{2}\sin\dfrac{3x}{2} = \dfrac{1}{2}$ (*)

Giải

Ta có: (*) $\Leftrightarrow \dfrac{1}{2}\cos x(\cos 2x + \cos x) + \dfrac{1}{2}\sin x\,(\cos 2x - \cos x) = \dfrac{1}{2}$

$\Leftrightarrow \cos x.\cos 2x + \sin x\cos 2x - \sin x\cos x = 1$

$\Leftrightarrow \cos 2x(\cos x + \sin x) = 1 - \cos^2 x + \sin\cos x$

$\Leftrightarrow \cos 2x(\cos x + \sin x) = \sin x(\sin x + \cos x)$

$\Leftrightarrow (\cos x + \sin x)(\cos 2x - \sin x) = 0\ (**)$

$\Leftrightarrow (\cos x + \sin x)(1 - 2\sin^2 x - \sin x) = 0$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \cos x = -\sin x \\ 2\sin^2 x + \sin x - 1 = 0 \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \tan x = -1 \\ \sin x = -1 \\ \sin x = \dfrac{1}{2} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = -\dfrac{\pi}{4} + k\pi \\ x = -\dfrac{\pi}{2} + k2\pi \\ x = \dfrac{\pi}{6} + k2\pi \vee x = \dfrac{5\pi}{6} + k2\pi \end{array}\right. \quad (k \in Z).\ \blacksquare$$

Cách khác: $(**) \Leftrightarrow \tan x = -1 \vee \cos 2x = \sin x = \cos\left(\dfrac{\pi}{2} - x\right)$

Bài 39. Giải phương trình: $4\cos^3 x + 3\sqrt{2}\sin 2x = 8\cos x\ (*)$

Giải

Ta có: $(*) \Leftrightarrow 4\cos^3 x + 6\sqrt{2}\sin x\cos x - 8\cos x = 0$

$\Leftrightarrow \cos x(2\cos^2 x + 3\sqrt{2}\sin x - 4) = 0.$

$\Leftrightarrow \cos x[3(1 - \sin^2 x) + 3\sqrt{2}\sin x - 4] = 0$

$\Leftrightarrow \cos x = 0 \vee 2\sin^2 x - 3\sqrt{2}\sin x + 2 = 0$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \cos x = 0 \\ \sin x = \dfrac{\sqrt{2}}{2} \\ \sin x = \sqrt{2}\ \text{(loại)} \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2} + k\pi \vee \sin x = \frac{\sqrt{2}}{2} = \sin\frac{\pi}{4}$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2} + k\pi \vee x = \frac{\pi}{4} + k2\pi \vee x = \frac{3\pi}{4} + k2\pi\ (k \in Z).\ \blacksquare$$

Bài 40. Giải phương trình:

$$\cos\left(2x + \frac{\pi}{4}\right) + \cos\left(2x - \frac{\pi}{4}\right) + 4\sin x = 2 + \sqrt{2}(1 - \sin x)\ (*)$$

Giải

Ta có: (*) $\Leftrightarrow 2\cos 2x.\cos\dfrac{\pi}{4} + 4\sin x = 2 + \sqrt{2}(1 - \sin x)$

$$\Leftrightarrow \sqrt{2}(1 - 2\sin^2 x) + (4 + \sqrt{2})\sin x - 2 - \sqrt{2} = 0$$

$$\Leftrightarrow 2\sqrt{2}\sin^2 x - (4 + \sqrt{2})\sin x + 2 = 0$$

$$\Leftrightarrow 2\sin^2 x - (2\sqrt{2} + 1)\sin x + \sqrt{2} = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \sin x = \sqrt{2} \text{ (loại)} \\ \sin x = \dfrac{1}{2} \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{\pi}{6} + k2\pi \text{ hoặc } x = \frac{5\pi}{6} + k2\pi,\ k \in Z. \blacksquare$$

Bài 41. Giải phương trình: $\dfrac{4\sin^2 2x + 6\sin^2 x - 9 - 3\cos 2x}{\cos x} = 0$ (*)

Giải

Điều kiện: $\cos x \neq 0$

Lúc đó: (*) $\Leftrightarrow 4\sin^2 2x + 6\sin^2 x - 9 - 3\cos 2x = 0$

$$\Leftrightarrow 4(1 - \cos^2 2x) + 3(1 - \cos 2x) - 9 - 3\cos 2x = 0$$

$$\Leftrightarrow 4\cos^2 2x + 6\cos 2x + 2 = 0$$

$$\Leftrightarrow \cos 2x = -1 \vee \cos 2x = -\frac{1}{2}$$

$$\Leftrightarrow 2\cos^2 x - 1 = -1 \vee 2\cos^2 x - 1 = -\frac{1}{2}$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \cos x = 0 \text{ (loại do điều kiện)} \\ \cos x = \pm\dfrac{1}{2} \text{ (nhận do } \cos x \neq 0) \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow x = \pm\frac{\pi}{3} + k2\pi \vee x = \pm\frac{2\pi}{3} + k2\pi \ (k \in Z)\ .\blacksquare$$

Bài 42. Giải phương trình: $\sin^8 x + \cos^8 x = \dfrac{17}{16}\cos^2 2x$ (*)

Giải

Ta có: $\sin^8 x + \cos^8 x = (\sin^4 x + \cos^4 x)^2 - 2\sin^4 x\cos^4 x$

$$= \left[(\sin^2 x + \cos^2 x)^2 - 2\sin^2 x\cos^2 x\right]^2 - \frac{1}{8}\sin^4 2x$$

$$= \left(1 - \frac{1}{2}\sin^2 2x\right)^2 - \frac{1}{8}\sin^4 2x = 1 - \sin^2 2x + \frac{1}{8}\sin^4 2x$$

Do đó: (*) $\Leftrightarrow 16(1 - \sin^2 2x + \frac{1}{8}\sin^2 2x) = 17(1 - \sin^2 2x)$

$$\Leftrightarrow 2\sin^4 2x + \sin^2 2x - 1 = 0$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \sin^2 2x = -1 \text{ (loại)} \\ \sin^2 2x = \frac{1}{2} \end{array}\right. \Leftrightarrow \frac{1}{2}(1 - \cos 4x) = \frac{1}{2}$$

$$\Leftrightarrow \cos 4x = 0 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{8} + \frac{k\pi}{4}, (k \in Z). \blacksquare$$

Bài 43. Giải phương trình: $\sin 2x(\cot x + \tan 2x) = 4\cos^2 x$ (*)

Giải

Điều kiện: $\cos 2x \neq 0$ và $\sin x \neq 0 \Leftrightarrow \cos 2x \neq 0 \wedge \cos 2x \neq 1$

Ta có: $\cot x + \tan 2x = \dfrac{\cos x}{\sin x} + \dfrac{\sin 2x}{\cos 2x}$

$$= \frac{\cos 2x\cos x + \sin 2x\sin x}{\sin x\cos 2x} = \frac{\cos x}{\sin x\cos 2x}$$

Lúc đó: (*) $\Leftrightarrow 2\sin x.\cos x\left(\dfrac{\cos x}{\sin x\cos 2x}\right) = 4\cos^2 x$

$$\Leftrightarrow \frac{\cos^2 x}{\cos 2x} = 2\cos^2 x$$

$$\Leftrightarrow (\cos 2x + 1) = 2\cos 2x(\cos 2x + 1)$$

$$\Leftrightarrow (\cos 2x + 1) = 0 \text{ hay } 1 = 2\cos 2x$$

$$\Leftrightarrow \cos 2x = -1 \vee \cos 2x = \frac{1}{2} \text{ (nhận do } \cos 2x \neq 0 \text{ và } \cos 2x \neq 1)$$

$$\Leftrightarrow 2x = \pi + k2\pi \vee 2x = \pm\frac{\pi}{3} + k2\pi, k \in Z$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2} + k\pi \vee x = \frac{\pi}{6} + k\pi, (k \in Z). \blacksquare$$

Bài 44. Giải phương trình: $\tan^3\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = \tan x - 1$ (*)

Giải

Đặt $t = x - \frac{\pi}{4} \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{4} + t$

Lúc đó (*) trở thành: $\tan^3 t = \tan\left(\frac{\pi}{4} + t\right) - 1 = \frac{1 + \tan t}{1 - \tan t} - 1$ với $\cos t \neq 0$

$\wedge \tan t \neq 1$ $\Leftrightarrow \tan^3 t = \frac{2\tan t}{1 - \tan t} \Leftrightarrow \tan^3 t - \tan^4 t = 2\tan t$

$$\Leftrightarrow \tan t\left(\tan^3 t - \tan^2 t + 2\right) = 0$$

$$\Leftrightarrow \tan t(\tan t + 1)\left(\tan^2 t - 2\tan t + 2\right) = 0$$

$$\Leftrightarrow \tan t = 0 \vee \tan t = -1 \left(\text{nhận so điều kiện}\right)$$

$$\Leftrightarrow t = k\pi \vee t = -\frac{\pi}{4} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

Vậy (*) $\Leftrightarrow x = \frac{\pi}{4} + k\pi$ hoặc $x = k\pi, k \in \mathbb{Z}$. ■

Bài 45. (Tuyển sinh Đại học khối D, 2006)

Giải phương trình: $\cos 3x + \cos 2x - \cos x - 1 = 0$

Giải

Ta có: (*) $\Leftrightarrow (4\cos^3 x - 3\cos x) + (2\cos^2 x - 1) - \cos x - 1 = 0$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} t = \cos x \ (\text{với } |t| \leq 1) \\ 4t^3 + 2t^2 - 4t - 2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t = \cos x \ (\text{với } |t| \leq 1) \\ t = \pm 1 \vee t = \frac{-1}{2} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \cos x = \pm 1 \vee \cos x = -\frac{1}{2} = \cos\frac{2\pi}{3}$$

$$\Leftrightarrow \sin x = 0 \vee \cos x = \cos\frac{2\pi}{3}$$

$$\Leftrightarrow x = k\pi \vee x = \pm\frac{2\pi}{3} + k2\pi \ (k \in Z)$$. ■

Bài 46. (Tuyển sinh Đại học khối A, 2006)

Giải phương trình: $\frac{2(\sin^6 x + \cos^6 x) - \sin x\cos x}{\sqrt{2} - 2\sin x} = 0$ (*)

Giải

Điều kiện: $\sin x \neq \frac{\sqrt{2}}{2} \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq \frac{\pi}{4} + m2\pi \\ x \neq \frac{3\pi}{4} + n2\pi \end{cases}$

Lúc đó: (*) $\Leftrightarrow 2(\sin^6 x + \cos^6 x) - \sin x\cos x = 0$

$$\Leftrightarrow 2(\sin^2x + \cos^2x)(\sin^4x + \cos^4x - \sin^2x\cos^2x) - \frac{\sin2x}{2} = 0$$

$$\Leftrightarrow 2[(\sin^2x + \cos^2x)^2 - \frac{3}{4}\sin^22x] - \frac{\sin2x}{2} = 0$$

$$\Leftrightarrow 2 - \frac{3}{2}\sin^22x - \frac{1}{2}\sin2x = 0$$

$$\Leftrightarrow 3\sin^22x + \sin2x - 4 = 0$$

$$\Leftrightarrow \sin2x = 1 \text{ v } \sin2x = -\frac{4}{3} \text{ (loại)} \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{4} + k\pi$$

So với điều kiện thì (*) $\Leftrightarrow x = \frac{5\pi}{4} + k2\pi$ $(k \in Z)$. ■

Chú ý: Khi gặp phương trình lượng giác dạng

R(tanx, cotx, sin2x, cos2x, tan2x) với R hàm hữu tỉ thì đặt t = tanx

Lúc đó $\tan2x = \frac{2t}{1-t^2}$, $\sin2x = \frac{2t}{1+t^2}$, $\cos2x = \frac{1-t^2}{1+t^2}$

Bài 47. (Đề thi tuyển sinh Đại học khối A, năm 2003)

Giải phương trình $\cot x - 1 = \frac{\cos2x}{1+\tan x} + \sin^2x - \frac{1}{2}\sin2x$(*)

Giải

Điều kiện: $\sin2x \neq 0$ và $tgx \neq -1$

Đặt $t = \tan x$ thì (*) thành:

$$\frac{1}{t} - 1 = \frac{\frac{1-t^2}{1+t^2}}{1+t} + \frac{1}{2}\left[1 - \frac{1-t^2}{1+t^2}\right] - \frac{1}{2}.\frac{2t}{1+t^2}$$

$$\Leftrightarrow \frac{1-t}{t} = \frac{1-t}{1+t^2} + \frac{1}{2}.\frac{2t^2}{1+t^2} - \frac{t}{1+t^2} \text{(do } t \neq -1)$$

$$\Leftrightarrow \frac{1-t}{t} = \frac{t^2-2t+1}{1+t^2} = \frac{(1-t)^2}{1+t^2}$$

$$\Leftrightarrow (1-t)(1+t^2) = (1-t)^2t$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 1 - t = 0 \\ 1 + t^2 = (1-t)t \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t = 1 \text{ (nhận do } t \neq -1) \\ 2t^2 - t + 1 = 0 \text{(vô nghiệm)} \end{array}\right.$$

Vậy (*) $\Leftrightarrow \tan x = 1 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{4} + k\pi$ (nhận do $\sin2x = 1 \neq 0$) . ■

Bài 48. Giải phương trình: $\sin 2x + 2\tan x = 3$ (*)

Giải

Điều kiện: $\cos x \neq 0$

Đặt $t = \tan x$ thì (*) thành: $\dfrac{2t}{1+t^2} + 2t = 3$

$$\Leftrightarrow 2t + (2t-3)(1+t^2) = 0$$

$$\Leftrightarrow 2t^3 - 3t^2 + 4t - 3 = 0$$

$$\Leftrightarrow (t-1)(2t^2 - t + 3) = 0$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t = 1 \\ 2t^2 - t + 3 = 0 \text{ (vô nghiệm)} \end{array}\right.$$

Vậy (*) $\Leftrightarrow \operatorname{tg}x = 1 \Leftrightarrow x = \dfrac{\pi}{4} + k\pi$ $(k \in Z)$. ■

Bài 49. Giải phương trình: $\cot x - \tan x + 4\sin 2x = \dfrac{2}{\sin 2x}$ (*)

Giải

Điều kiện: $\sin 2x \neq 0$

Đặt $t = \tan x$ thì $\sin 2x = \dfrac{2t}{1+t^2}$ do $\sin 2x \neq 0$ nên $t \neq 0$

(*) thành: $\dfrac{1}{t} - t + \dfrac{8t}{1+t^2} = \dfrac{1+t^2}{t} = \dfrac{1}{t} + t \Leftrightarrow \dfrac{8t}{1+t^2} = 2t$

$$\Leftrightarrow \frac{4}{1+t^2} = 1 \text{ (do } t \neq 0) \Leftrightarrow t^2 = 3 \Leftrightarrow t = \pm\sqrt{3} \text{ (nhận do } t \neq 0)$$

Vậy (*) $\Leftrightarrow \tan x = \tan\left(\pm\dfrac{\pi}{3}\right) \Leftrightarrow x = \pm\dfrac{\pi}{3} + k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$. ■

Bài 50. Giải phương trình: $(1 - \tan x)(1 + \sin 2x) = 1 + \tan x$ (*)

Giải

Điều kiện: $\cos x \neq 0$

Đặt $t = \tan x$ thì (*) thành: $(1-t)\left(1 + \dfrac{2t}{1+t^2}\right) = 1 + t$

$$\Leftrightarrow (1-t)\frac{(t+1)^2}{1+t^2} = 1 + t \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t = -1 \\ \dfrac{(1-t)(1+t)}{1+t^2} = 1 \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t=-1 \\ 1-t^2=1+t^2 \end{array}\right. \Leftrightarrow t=-1 \vee t=0$$

Do đó (*) $\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \tan x=-1 \\ \tan x=0 \end{array}\right. \Leftrightarrow x=-\dfrac{\pi}{4}+k\pi$ hay $x=k\pi, k\in\mathbb{Z}$. ■

Bài 51. Cho phương trình $\cos 2x-(2m+1)\cos x+m+1=0\,(*)$

a) Giải phương trình khi $m=\dfrac{3}{2}$

b) Tìm m để (*) có nghiệm trên $\left(\dfrac{\pi}{2},\dfrac{3\pi}{2}\right)$

Giải

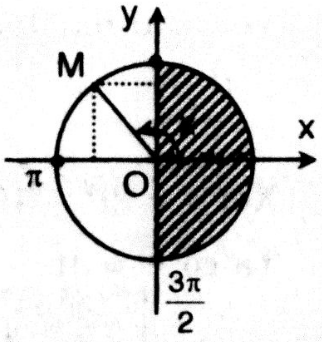
Ta có (*) $\Leftrightarrow 2\cos^2x-(2m+1)\cos x+m=0$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} t=\cos x \quad (|t|\le 1) \\ 2t^2-(2m+1)t+m=0 \end{cases} \Leftrightarrow . \begin{cases} t=\cos x \text{ với } (|t|\le 1) \\ t=\dfrac{1}{2}\vee t=m \end{cases}$$

a) Khi $m=\dfrac{3}{2}$

$\Leftrightarrow \cos x=\dfrac{1}{2}\vee \cos x=\dfrac{3}{2}$ (loại)

$\Leftrightarrow x=\pm\dfrac{\pi}{3}+k2\pi\ (k\in Z)$



b) Khi $x\in\left(\dfrac{\pi}{2},\dfrac{3\pi}{2}\right)$ thì $\cos x=t\in[-1,0)$

Do $t=\dfrac{1}{2}\notin[-1,0]$ nên: (*) có nghiệm trên $\left(\dfrac{\pi}{2},\dfrac{3\pi}{2}\right)$

$\Leftrightarrow m\in[-1,0)$. ■

Bài 52. Cho phương trình: $(\cos x+1)(\cos 2x-m\cos x)=m\sin^2x\ (*)$

a) Giải (*) khi $m=-2$

b) Tìm m sao cho (*) có đúng hai nghiệm trên $\left[0,\dfrac{2\pi}{3}\right]$

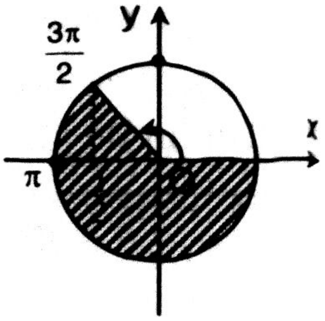
Giải

Ta có (*) $\Leftrightarrow (\cos x + 1)\left(2\cos^2 x - 1 - m\cos x\right) = m\left(1 - \cos^2 x\right)$

$$\Leftrightarrow (\cos x + 1)\left[2\cos^2 x - 1 - m\cos x - m(1 - \cos x)\right] = 0$$

$$\Leftrightarrow (\cos x + 1)\left(2\cos^2 x - 1 - m\right) = 0$$

a) Khi m = –2 thì (*) thành:



$$(\cos x + 1)\left(2\cos^2 x + 1\right) = 0$$

$\Leftrightarrow \cos x = -1$

$\Leftrightarrow x = \pi + k2\pi \ (k \in Z)$

b) Khi $x \in \left[0, \frac{2\pi}{3}\right]$ thì $\cos x = t \in \left[-\frac{1}{2}, 1\right]$

Nhận xét rằng với mỗi t trên $\left[-\frac{1}{2}, 1\right]$ ta chỉ tìm được duy nhất một x trên $\left[0, \frac{2\pi}{3}\right]$ Vậy:

Yêu cầu bài toán $\Leftrightarrow 2t^2 - 1 - m = 0$ có đúng hai nghiệm trên $\left[-\frac{1}{2}, 1\right]$

Xét $y = 2t^2 - 1$(P) và $y = m$ (d)

Ta có $y' = 4t$

t	$-\frac{1}{2}$		0		1
y'		–		+	
y	$\frac{1}{2}$	↘	–1	↗	

Vậy (*) có đúng hai nghiệm trên $\left[0, \frac{2\pi}{3}\right]$

$\Leftrightarrow$ (d) cắt (P) tại hai điểm phân biệt trên $\left[-\frac{1}{2}, 1\right]$

$\Leftrightarrow -1 < m \le \frac{1}{2}$. ■

Bài 53. Cho phương trình $(1-a)tg^2x - \dfrac{2}{\cos x} + 1 + 3a = 0$ (1)

a) Giải (1) khi $a = \dfrac{1}{2}$

b) Tìm a để (1) có nhiều hơn một nghiệm trên $\left(0, \dfrac{\pi}{2}\right)$

Giải

Điều kiện: $\cos x \neq 0 \Leftrightarrow x = \dfrac{\pi}{2} + k\pi$

Ta có: (1) $\Leftrightarrow (1-a)\sin^2 x - 2\cos x + (1+3a)\cos^2 x = 0$

$\Leftrightarrow (1-a)(1-\cos^2 x) - 2\cos x + (1+3a)\cos^2 x = 0$

$\Leftrightarrow 4a\cos^2 x - 2\cos x + 1 - a = 0$

$\Leftrightarrow a(4\cos^2 x - 1) - (2\cos x - 1) = 0$

$\Leftrightarrow (2\cos x - 1)[a(2\cos x + 1) - 1] = 0$

a) Khi $a = \dfrac{1}{2}$ thì (1) thành: $(2\cos x - 1)\left(\cos x - \dfrac{1}{2}\right) = 0$

$\Leftrightarrow \cos x = \dfrac{1}{2} = \cos\dfrac{\pi}{3}$ (nhận so $\cos x \neq 0$

$\Leftrightarrow x = \pm\dfrac{\pi}{3} + k2\pi$ $(k \in Z)$

b) Khi $x \in \left(0, \dfrac{\pi}{2}\right)$ thì $\cos x = t \neq (0, 1)$

Ta có: (1) $\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \cos x = t = \dfrac{1}{2} \in (0,1) \\ 2a\cos x = 1 - a(2) \end{array}\right.$

Yêu cầu bài toán $\Leftrightarrow$ (2) có nghiệm trên $(0,1)\backslash\left\{\dfrac{1}{2}\right\}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a \neq 0 \\ 0 < \dfrac{1-a}{2a} < 1 \\ \dfrac{1-a}{2a} \neq \dfrac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a \neq 0 \\ \dfrac{1-a}{2a} > 0 \\ \dfrac{1-3a}{2a} < 0 \\ 2(1-a) \neq 2a \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 0 < a < 1 \\ a < 0 \vee a > \dfrac{1}{3} \\ a \neq \dfrac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{1}{3} < a < 1 \\ a \neq \dfrac{1}{2} \end{cases}$$ ■

Cách khác: đặt $u = \dfrac{1}{\cos x}$, điều kiện $u \geq 1$; phương trình thành:

$$(1 - a)(u^2 - 1) - 2u + 1 + 3a = 0 \Leftrightarrow (1 - a)u^2 - 2u + 4a = 0$$

$$\Leftrightarrow (u - 2)[(1 - a)u - 2a] = 0$$

Bài 54. Cho phương trình: $\cos 4x + 6\sin x\cos x = m$ (1)

a) Giải (1) khi $m = 1$

b) Tìm m để (1) có hai nghiệm phân biệt trên $\left[0, \dfrac{\pi}{4}\right]$

Giải

Ta có: (1) $\Leftrightarrow 1 - 2\sin^2 2x + 3\sin 2x = m$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} t = \sin 2x\left(|t| \leq 1\right) \\ 2t^2 - 3t + m - 1 = 0 (2) \end{cases}$$

a) Khi $m = 1$ thì (1) thành

$$\begin{cases} t = \sin 2x\left(|t| \leq 1\right) \\ 2t^2 - 3t = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t = \sin 2x\left(|t| \leq 1\right) \\ t = 0 \vee t = \dfrac{3}{2} (\text{loại}) \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \sin 2x = 0 \Leftrightarrow x = \frac{k\pi}{2}$$

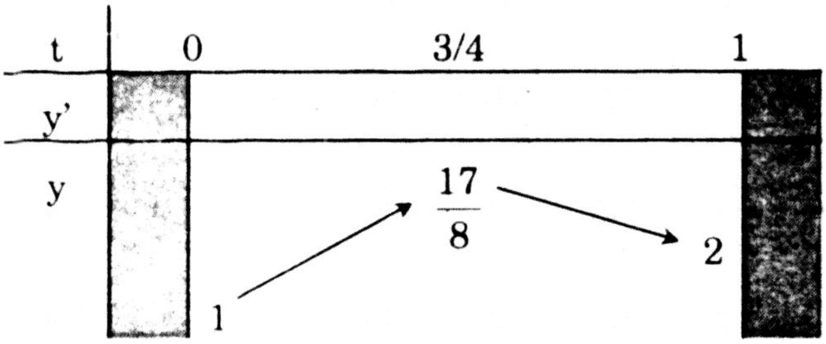
b) Khi $x \in \left[0, \dfrac{\pi}{4}\right]$ thì $\sin 2x = t \in [0, 1]$

Nhận thấy rằng mỗi t tìm được trên $[0,1]$ ta chỉ tìm được duy nhất một $x \in \left[0, \dfrac{\pi}{4}\right]$

Ta có: (2) $\Leftrightarrow -2t^2 + 3t + 1 = m$

Xét $y = -2t^2 + 3t + 1$ trên $[0,1]$ (d)

Thì $y' = -4t + 3$



Yêu cầu bài toán $\Leftrightarrow$ (d) và $y = m$ cắt nhau tại hai điểm phân biệt trên $[0,1]$

$\Leftrightarrow 2 \le m < \dfrac{17}{8}$. ■

Cách khác: đặt $f(x) = 2t^2 - 3t + m - 1$. Vì $a = 2 > 0$, nên ta có

Yêu cầu bài toán $\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta = 17 - 8m > 0 \\ f(0) = m - 1 \ge 0 \\ f(1) = m - 2 \ge 0 \Leftrightarrow 2 < \dfrac{17}{8} \\ 0 \le \dfrac{S}{2} = \dfrac{3}{4} \le 1 \end{cases}$

BÀI TẬP TỰ GIẢI

Bài 1. Giải các phương trình sau:

a) $\sin 4x = \tan x$

b) $3\cos 4x - 8\cos^6 x + 2\cos^2 x + 3 = 0$

c) $\tan x + \cot x = 4$

d) $\dfrac{\sin x\left(3\sqrt{2} - 2\cos x\right) - 2\sin^2 x - 1}{1 - \sin 2x} = 1$

e) $4\cos^4 x + 3\sqrt{2}\sin 2x = 8\cos x$

f) $\dfrac{1}{\cos x} + \dfrac{1}{\sin 2x} = \dfrac{2}{\sin 4x}$

g) $\sin 2x + \sqrt{2}\sin\left(x - \dfrac{\pi}{4}\right) = 1$

h) $\cot x = \tan x + \dfrac{2\cos 4x}{\sin 2x}$

k) $4\sin^3 x + 4\sin^2 x + 3\sin 2x + 6\cos x = 0$

l) $\tan\frac{x}{2}.\cos x + \sin 2x = 0$

m) $1 + 3\tan x = 2\sin 2x$

n) $\cot x = \tan x + 2\tan 2x$

p) $2\cos^2\frac{3x}{5} + 1 = 3\cos\frac{4x}{5}$

q) $3\cos 4x - 2\cos^2 3x = 1$

r) $2\cos^2\frac{3x}{2} + 1 = 3\cos 2x$

s) $\cos 2x + \cos x(\tan^2 x - 1) = 2$

t) $2\tan 2x - 4\tan 3x = \tan^2 3x.\tan 2x$

u) $\sin x.\cos 2x + \cos^2 x(\tan^2 x - 1) + 2\sin^3 x = 0$

v) $\cos^2 x + \cos^2 2x + \cos^2 3x + \cos^2 4x = \frac{3}{2}$

w) $\frac{\sin^4 x + \cos^4 x}{5\sin 2x} = \frac{1}{2}\cot 2x - \frac{1}{8\sin 2x}$

y) $4\sin^3 x + 4\sin^2 x + 3\sin 2x + 6\cos x = 0$

Bài 2. Cho phương trình $\frac{\sin^6 x + \cos^6 x}{\cos^2 2x - \sin^2 x} = 2m\tan 2x$ (1)

a) Giải (1) khi $m = \frac{1}{8}$

b) Tìm m sao cho (1) có nghiệm

Bài 3. Cho phương trình: $6\sin^2 x - \cos^2 x = m\cos^2 2x$ (2)

a) Giải (2) khi m = 3

b) Tìm m sao cho (2) có nghiệm.

III. Phương trình bậc nhất theo sin và cosin:

$$a\sin x + b\cos x = c \text{ với } a^2 + b^2 \neq 0$$

Cách 1: Chia 2 vế phương trình cho $\sqrt{a^2 + b^2} \neq 0$

Đặt $\cos\alpha = \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}}$ và $\sin\alpha = \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}}$ với $\alpha \in [0, 2\pi]$

Thì (*) $\sin x\cos\alpha + \cos x\sin\alpha = \frac{c}{\sqrt{a^2 + b^2}} \Leftrightarrow \sin(x + a) = \frac{c}{\sqrt{a^2 + b^2}}$

- **Phương trình có nghiệm**

$$\Leftrightarrow \frac{|\mathbf{c}|}{\sqrt{\mathbf{a}^2 + \mathbf{b}^2}} \le 1 \Leftrightarrow \mathbf{a}^2 + \mathbf{b}^2 \ge \mathbf{c}^2$$

Cách 2:

- Nếu $u = k2\pi$ là nghiệm của (*) thì: $a\sin\pi + b\cos\pi = c \Leftrightarrow -b = c$
- Nếu $u \neq \pi + k2\pi$ đặt $t = \tan\frac{u}{2}$ thì (*) thành:

$$a\frac{2t}{1+t^2} + b\frac{1-t^2}{1+t^2} = c$$

$\Leftrightarrow (b + c)t^2 - 2at + c - b = 0$ (1) (với $b + c \neq 0$)

Phương trình có nghiệm

$\Leftrightarrow \Delta' = a^2 - (c + b)(c - b) \ge 0$

$\Leftrightarrow a^2 \ge c^2 - b^2 \Leftrightarrow a^2 + b^2 \ge c^2$

Giải phương trình (1) tìm được t. Từ $t = \tan\frac{u}{2}$ ta tìm được u.

Bài 55. (Tuyển sinh khối D, 2007)

Giải phương trình: $(\sin\frac{x}{2} + \cos\frac{x}{2})^2 + \sqrt{3}\cos x = 2$ (*)

Giải

Ta có: (*) $\Leftrightarrow (1 + \sin x) + \sqrt{3}\cos x = 2$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{2}\sin x + \frac{\sqrt{3}}{2}\cos x = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \sin x\cos\frac{\pi}{3} + \cos x\sin\frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}$$

$$\Leftrightarrow \sin(x + \frac{\pi}{3}) = \sin\frac{\pi}{6} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x + \frac{\pi}{3} = \frac{\pi}{6} + k2\pi \\ x + \frac{\pi}{3} = \frac{5\pi}{6} + k2\pi \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow x = -\frac{\pi}{6} + k2\pi \vee x = \frac{\pi}{2} + k2\pi \ (k \in Z)\ .\blacksquare$$

Bài 56. Tìm $x \in \left(\frac{2\pi}{5}, \frac{6\pi}{7}\right)$ thỏa phương trình:

$\cos 7x - \sqrt{3}\sin 7x = -\sqrt{2}$ (*)

Giải

Chia hai vế của (*) cho 2 ta được:

$$(*) \Leftrightarrow \frac{1}{2}\cos 7x - \frac{\sqrt{3}}{2}\sin 7x = -\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\Leftrightarrow -\sin\frac{\pi}{6}\cos 7x + \cos\frac{\pi}{6}\sin 7x = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\Leftrightarrow \sin\left(7x - \frac{\pi}{6}\right) = \sin\frac{\pi}{4}$$

$$\Leftrightarrow 7x - \frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{4} + k2\pi \text{ hay } 7x - \frac{\pi}{6} = \frac{3\pi}{4} + h2\pi \ (k,h \in \mathbb{Z})$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{5\pi}{84} + \frac{k2\pi}{7} \text{ hay } x = \frac{11\pi}{84} + \frac{h2\pi}{7}, \ (k,h \in \mathbb{Z})$$

Do $x \in \left(\frac{2\pi}{5}, \frac{6\pi}{7}\right)$ nên ta phải có:

$$\frac{2\pi}{5} < \frac{5\pi}{84} + \frac{k2\pi}{7} < \frac{6\pi}{7} \text{ hay } \frac{2\pi}{5} < \frac{11\pi}{84} + \frac{h2\pi}{7} < \frac{6\pi}{7} \ (k \in \mathbb{Z})$$

$$\Leftrightarrow \frac{2}{5} < \frac{5}{84} + \frac{k2}{7} < \frac{6}{7} \text{ hay } \frac{2}{5} < \frac{11}{84} + \frac{h2}{7} < \frac{6}{7} \ (k \in \mathbb{Z})$$

Suy ra $k = 2$; $h = 1,2$

Vậy $x = \frac{53\pi}{84} \vee x = \frac{35\pi}{84} \vee x = \frac{59\pi}{84}$. ■

Bài 57. Giải phương trình: $3\sin 3x - \sqrt{3}\cos 9x = 1 + 4\sin^3 3x$ (*)

Giải

Ta có: $(*) \Leftrightarrow \left(3\sin 3x - 4\sin^3 3x\right) - \sqrt{3}\cos 9x = 1$

$$\Leftrightarrow \sin 9x - \sqrt{3}\cos 9x = 1$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{2}\sin 9x - \frac{\sqrt{3}}{2}\cos 9x = \frac{1}{2}$$

$$\Leftrightarrow \sin\left(9x - \frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{2} = \sin\frac{\pi}{6}$$

$$\Leftrightarrow 9x - \frac{\pi}{3} = \frac{\pi}{6} + k2\pi \text{ hoặc } 9x - \frac{\pi}{3} = \frac{5\pi}{6} + k2\pi, \ k \in \mathbb{Z}$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{\pi}{18} + \frac{k2\pi}{9} \text{ hoặc } x = \frac{7\pi}{54} + \frac{k2\pi}{9}, \ k \in \mathbb{Z}. ■$$

Bài 58. Giải phương trình:

$$\tan x - \sin 2x - \cos 2x + 2\left(2\cos x - \frac{1}{\cos x}\right) = 0 \ (*)$$

Giải

Điều kiện: $\cos x \neq 0$

Lúc đó: $(*) \Leftrightarrow \dfrac{\sin x}{\cos x} - \sin 2x - \cos 2x + 4\cos x - \dfrac{2}{\cos x} = 0$

$\Leftrightarrow \sin x - \sin 2x\cos x - \cos x\cos 2x + 4\cos^2 x - 2 = 0$

$\Leftrightarrow \sin x\left(1 - 2\cos^2 x\right) - \cos x\cos 2x + 2\cos 2x = 0$

$\Leftrightarrow -\sin x\cos 2x - \cos x\cos 2x + 2\cos 2x = 0$

$\Leftrightarrow \cos 2x = 0$ hay $-\sin x - \cos x + 2 = 0$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\cos 2x = 0 \ \left(\text{nhận do } \cos 2x = 2\cos^2 x - 1 = 0 \text{ thì } \cos x \neq 0\right)\\ \sin x + \cos x = 2 \left(\text{vô nghiệm vì } 1^2 + 1^2 < 2^2\right)\end{array}\right.$$

$\Leftrightarrow 2x = (2k+1)\dfrac{\pi}{2}, k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow x = \dfrac{\pi}{4} + \dfrac{k\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}$. ■

Bài 59. Giải phương trình: $8\sin x = \dfrac{\sqrt{3}}{\cos x} + \dfrac{1}{\sin x}$ (*)

Giải

Cách 1: Điều kiện: $\sin 2x \neq 0$

Lúc đó $(*) \Leftrightarrow 8\sin^2 x\cos x = \sqrt{3}\sin x + \cos x$

$\Leftrightarrow 4(1 - \cos 2x)\cos x = \sqrt{3}\sin x + \cos x$

$\Leftrightarrow -4\cos 2x\cos x = \sqrt{3}\sin x - 3\cos x$

$\Leftrightarrow -2(\cos 3x + \cos x) = \sqrt{3}\sin x - 3\cos x$

$\Leftrightarrow \cos 3x = \dfrac{\sqrt{3}}{2}\sin x + \dfrac{1}{2}\cos x$

$\Leftrightarrow \cos 3x = \cos\left(x + \dfrac{\pi}{3}\right)$

$\Leftrightarrow 3x = x + \dfrac{\pi}{3} + k2\pi \vee 3x = -x - \dfrac{\pi}{3} + k2\pi$

$$\Leftrightarrow x = \frac{\pi}{6} + k\pi \vee x = -\frac{\pi}{12} + \frac{k\pi}{2},\ k \in \mathbb{Z}$$

Nhận so với điều kiện $\sin 2x \neq 0$

Cách 2: Ta có: (*) $\Leftrightarrow 8\sin^2 x\cos x = \sqrt{3}\sin x + \cos x$

(hiển nhiên $\cos x = 0$ hay $\sin x = 0$ không là nghiệm của pt này)

$$\Leftrightarrow 8(1 - \cos^2 x)\cos x = \sqrt{3}\sin x + \cos x$$

$$\Leftrightarrow 8\cos x - 8\cos^3 x = \sqrt{3}\sin x + \cos x$$

$$\Leftrightarrow 6\cos x - 8\cos^3 x = \sqrt{3}\sin x - \cos x$$

$$\Leftrightarrow 4\cos^3 x - 3\cos x = \frac{1}{2}\cos x - \frac{\sqrt{3}}{2}\sin x$$

$$\Leftrightarrow \cos 3x = \cos\left(x + \frac{\pi}{3}\right)$$

$$\Leftrightarrow 3x = x + \frac{\pi}{3} + k2\pi \vee 3x = -x - \frac{\pi}{3} + k2\pi$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{\pi}{6} + k\pi \vee x = -\frac{\pi}{12} + \frac{k\pi}{2},\ k \in \mathbb{Z}.\blacksquare$$

Bài 60. Giải phương trình: $9\sin x + 6\cos x - 3\sin 2x + \cos 2x = 8$ (*)

Giải

Ta có: (*) $\Leftrightarrow 9\sin x + 6\cos x - 6\sin x\cos x + \left(1 - 2\sin^2 x\right) = 8$

$$\Leftrightarrow 6\cos x - 6\sin x\cos x - 2\sin^2 x + 9\sin x - 7 = 0$$

$$\Leftrightarrow 6\cos x(1 - \sin x) - 2(\sin x - 1)\left(\sin x - \frac{7}{2}\right) = 0$$

$$\Leftrightarrow 1 - \sin x = 0 \text{ hay } 6\cos x + 2\left(\sin x - \frac{7}{2}\right) = 0$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\sin x = 1\\ 6\cos x + 2\sin x = 7 \ \left(\text{vô nghiệm do } 6^2 + 2^2 < 7^2\right)\end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2} + k2\pi,\ k \in \mathbb{Z}.\blacksquare$$

Bài 61. Giải phương trình: $\sin 2x + 2\cos 2x = 1 + \sin x - 4\cos x$ (*)

Giải

Ta có: (*) $\Leftrightarrow 2\sin x\cos x + 2\left(2\cos^2 x - 1\right) = 1 + \sin x - 4\cos x$

$\Leftrightarrow 2\sin x\cos x - \sin x + 4\cos^2 x + 4\cos x - 3 = 0$

$\Leftrightarrow 2\sin x\left(\cos x - \dfrac{1}{2}\right) + 4\left(\cos x - \dfrac{1}{2}\right)\left(\cos x + \dfrac{3}{2}\right) = 0$

$\Leftrightarrow \cos x - \dfrac{1}{2} = 0$ hay $2\sin x + 4\cos x + 6$ (vô nghiệm so $2^2 + 4^2 < 6^2$)

$\Leftrightarrow x = \pm\dfrac{\pi}{3} + k2\pi$. ■

Bài 62. Giải phương trình: $\sin 2x - \cos 2x = 3\sin x + \cos x - 2$ (*)

Giải

Ta có (*) $\Leftrightarrow 2\sin x\cos x - \left(1 - 2\sin^2 x\right) = 3\sin x + \cos x - 2$

$\Leftrightarrow \cos x(2\sin x - 1) + 2\sin^2 x - 3\sin x + 1 = 0$

$\Leftrightarrow \cos x(2\sin x - 1) + (\sin x - 1)(2\sin x - 1) = 0$

$\Leftrightarrow 2\sin x - 1 = 0$ hay $\cos x + \sin x - 1 = 0$

$\Leftrightarrow \sin x = \dfrac{1}{2}$ hay $\sqrt{2}\cos\left(x - \dfrac{\pi}{4}\right) = 1$

$\Leftrightarrow x = \dfrac{\pi}{6} + k2\pi \vee x = \dfrac{5\pi}{6} + k2\pi$ hay $x - \dfrac{\pi}{4} = \pm\dfrac{\pi}{4} + k2\pi,\ k \in \mathbb{Z}$

$\Leftrightarrow x = \dfrac{\pi}{6} + k2\pi \vee x = \dfrac{5\pi}{6} + k2\pi$ hay $x = \dfrac{\pi}{2} + k2\pi \vee x = k2\pi,\ k \in \mathbb{Z}$. ■

Bài 63. Giải phương trình: $\left(\sin 2x + \sqrt{3}\cos 2x\right)^2 - 5 = \cos\left(2x - \dfrac{\pi}{6}\right)$ (*)

Giải

Đặt $t = \sin 2x + \sqrt{3}\cos 2x$,

Thì $t = 2\left(\dfrac{1}{2}\sin 2x + \dfrac{\sqrt{3}}{2}\cos 2x\right) = 2\cos\left(2x - \dfrac{\pi}{6}\right)$

Vậy (*) thành: $t^2 - 5 = \dfrac{t}{2} \Leftrightarrow 2t^2 - t - 10 = 0 \Leftrightarrow t = \dfrac{5}{2}$ (loại) $\vee\ t = -2$

Do đó (*) $\Leftrightarrow \cos\left(2x - \dfrac{\pi}{6}\right) = -1 \Leftrightarrow 2x - \dfrac{\pi}{6} = \pi + k2\pi \Leftrightarrow x = \dfrac{7\pi}{12} + k\pi$. ■

Bài 64. Giải phương trình: $2\cos^3x + \cos2x + \sin x = 0$ (*)

Giải

Ta có (*) $\Leftrightarrow 2\cos^3x + 2\cos^2x - 1 + \sin x = 0$

$\Leftrightarrow 2\cos^2x(\cos x + 1) - 1 + \sin x = 0$

$\Leftrightarrow 2(1 - \sin^2x)(1 + \cos x) - (1 - \sin x) = 0$

$\Leftrightarrow 1 - \sin x = 0$ hay $2(1 + \sin x)(1 + \cos x) - 1 = 0$

$\Leftrightarrow 1 - \sin x = 0$ hay $1 + 2\sin x\cos x + 2(\sin x + \cos x) = 0$

$\Leftrightarrow 1 - \sin x = 0$ hay $(\sin x + \cos x)^2 + 2(\sin x + \cos x) = 0$

$\Leftrightarrow \sin x = 1$ hay $\sin x + \cos x = 0$ hay $\sin x + \cos x + 2 = 0$

(vô nghiệm do: $1^2 + 1^2 < 2^2$)

$\Leftrightarrow \sin x = 1$ hay $\tan x = -1 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2}$ hay $x = -\frac{\pi}{4} + k2\pi,\ k \in \mathbb{Z}$. ■

Bài 65. Giải phương trình $1 + \cot2x = \frac{1 - \cos2x}{\sin^2 2x}$ (*)

Giải

Điều kiện: $\sin2x \neq 0 \Leftrightarrow \cos2x \neq \pm1$

Ta có: (*) $\Leftrightarrow 1 + \cot2x = \frac{1 - \cos2x}{1 - \cos^2 2x} = \frac{1}{1 + \cos2x}$

$$\Leftrightarrow \cot2x = \frac{1}{1 + \cos2x} - 1 \Leftrightarrow \frac{\cos2x}{\sin2x} = \frac{-\cos2x}{1 + \cos2x}$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \cos2x = 0 \text{ (nhận do } \neq \pm1 \\ \dfrac{1}{\sin2x} = \dfrac{-1}{1 + \cos2x} \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \cos2x = 0 \vee 1 + \cos2x = -\sin2x$$

$$\Leftrightarrow \cos2x = 0 \vee \sin2x + \cos2x = -1$$

$$\Leftrightarrow \cos2x = 0 \vee \sin\left(2x + \frac{\pi}{4}\right) = -\frac{1}{\sqrt{2}} = \sin\left(\frac{-\pi}{4}\right)$$

$$\Leftrightarrow 2x = \frac{\pi}{2} + k\pi \vee \left[\begin{array}{l} 2x + \dfrac{\pi}{4} = -\dfrac{\pi}{4} + k2\pi \\ 2x + \dfrac{\pi}{4} = \dfrac{5\pi}{4} + k2\pi \end{array}\right.$$

$\Leftrightarrow x = \frac{\pi}{4} + \frac{k\pi}{2} \vee x = -\frac{\pi}{4} + k\pi \vee 2\pi = \pi + k2\pi$ (loại), $k \in \mathbb{Z}$

$\Leftrightarrow x = \frac{\pi}{4} + \frac{k\pi}{2}$, $k \in \mathbb{Z}$. ■

Bài 66. Giải phương trình $4(\sin^4 x + \cos^4 x) + \sqrt{3}\sin 4x = 2$ (*)

Giải

Cách 1:

Ta có: (*) $\Leftrightarrow 4\left[(\sin^2 x + \cos^2 x)^2 - 2\sin^2 x\cos^2 x\right] + \sqrt{3}\sin 4x = 2$

$$\Leftrightarrow 4\left[1 - \frac{1}{2}\sin^2 2x\right] + \sqrt{3}\sin 4x = 2 \Leftrightarrow \cos 4x + \sqrt{3}\sin 4x = -1$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{2}\cos 4x + \frac{\sqrt{3}}{2}\sin 4x = -\frac{1}{2} \Leftrightarrow \cos\left(4x - \frac{\pi}{3}\right) = \cos\frac{2\pi}{3}$$

$$\Leftrightarrow 4x - \frac{\pi}{3} = \pm\frac{2\pi}{3} + k2\pi$$

$$\Leftrightarrow 4x = \pi + k2\pi \text{ hay } 4x = -\frac{\pi}{3} + k2\pi,\ k \in \mathbb{Z}$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{\pi}{4} + k\frac{\pi}{2} \text{ hay } x = -\frac{\pi}{12} + k\frac{\pi}{2},\ k \in \mathbb{Z}$$

Cách 2:

Ta có: (*) $\Leftrightarrow 2(1 - \sin^2 2x) + \sqrt{3}\sin 4x = 0$

$$\Leftrightarrow 2\cos^2 2x + 2\sqrt{3}\sin 2x\cos 2x = 0$$

$$\Leftrightarrow \cos 2x = 0 \vee \cos 2x + \sqrt{3}\sin 2x = 0$$

$$\Leftrightarrow \cos 2x = 0 \vee \cot 2x = -\sqrt{3}$$

$$\Leftrightarrow 2x = \frac{\pi}{2} + k\pi \vee 2x = -\frac{\pi}{6} + k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{\pi}{4} + \frac{k\pi}{2} \vee x = -\frac{\pi}{12} + \frac{k\pi}{2},\ k \in \mathbb{Z}. ■$$

Bài 67. Giải phương trình: $1 + \sin^3 2x + \cos^3 2x = \frac{1}{2}\sin 4x$ (*)

Giải

Ta có (*) $\Leftrightarrow 1 + (\sin 2x + \cos 2x)(1 - \sin 2x\cos 2x) = \frac{1}{2}\sin 4x$

$$\Leftrightarrow 1 - \frac{1}{2}\sin 4x + (\sin 2x + \cos 2x)\left(1 - \frac{1}{2}\sin 4x\right) = 0$$

$$\Leftrightarrow 1 - \frac{1}{2}\sin 4x = 0 \text{ hay } 1 + \sin 2x + \cos 2x = 0$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \sin 4x = 2 \text{(loại)} \\ \sin 2x + \cos 2x = -1 \end{array}\right. \Leftrightarrow \sqrt{2}\sin\left(2x + \frac{\pi}{4}\right) = -1$$

$$\Leftrightarrow \sin\left(2x + \frac{\pi}{4}\right) = \sin\left(-\frac{\pi}{4}\right) \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 2x + \frac{\pi}{4} = -\frac{\pi}{4} + k2\pi \\ 2x + \frac{\pi}{4} = \frac{5\pi}{4} + k2\pi \end{array}\right. \quad (k \in \mathbb{Z})$$

$$\Leftrightarrow x = -\frac{\pi}{4} + k\pi \vee x = \frac{\pi}{2} + k\pi,\ k \in \mathbb{Z}. \blacksquare$$

Bài 68. Giải phương trình: $\tan x - 3\cot x = 4(\sin x + \sqrt{3}\cos x)$ (*)

Giải

Điều kiện $\begin{cases} \sin x \neq 0 \\ \cos x \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \sin 2x \neq 0$

Lúc đó: (*) $\Leftrightarrow \dfrac{\sin x}{\cos x} - 3\dfrac{\cos x}{\sin x} = 4(\sin x + \sqrt{3}\cos x)$

$$\Leftrightarrow \sin^2 x - 3\cos^2 x = 4\sin x\cos x(\sin x + \sqrt{3}\cos x)$$

$$\Leftrightarrow (\sin x + \sqrt{3}\cos x)(\sin x - \sqrt{3}\cos x - 2\sin 2x) = 0$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \sin x = -\sqrt{3}\cos x \\ \frac{1}{2}\sin x - \frac{\sqrt{3}}{2}\cos x = \sin 2x \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \tan x = -\sqrt{3} = \tan\left(-\frac{\pi}{3}\right) \\ \sin\left(x - \frac{\pi}{3}\right) = \sin 2x \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow x = -\frac{\pi}{3} + k\pi \vee x - \frac{\pi}{3} = 2x + k2\pi \vee x - \frac{\pi}{3} = \pi - 2x + k2\pi,\ k \in \mathbb{Z}$$

$$\Leftrightarrow x = -\frac{\pi}{3} + k\pi \vee x = -\frac{\pi}{3} - k2\pi \vee x = \frac{4\pi}{9} + \frac{k2\pi}{3},\ k \in \mathbb{Z}$$

$$\Leftrightarrow x = -\frac{\pi}{3} + k\pi \vee x = \frac{4\pi}{9} + \frac{k2\pi}{3} \text{ (nhận do } \sin 2x \neq 0\text{)}. \blacksquare$$

Bài 69. Giải phương trình: $\sin^3 x + \cos^3 x = \sin x - \cos x$ (*)

Giải

Ta có: (*) $\Leftrightarrow \sin^3 x - \sin x + \cos^3 x + \cos x = 0$

$$\Leftrightarrow \sin x(\sin^2 x - 1) + \cos^3 x + \cos x = 0$$

$$\Leftrightarrow -\sin x\cos^2 x + \cos^3 x + \cos x = 0$$

$$\Leftrightarrow \cos x = 0 \text{ hay } -\sin x\cos x + \cos^2 x + 1 = 0$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\cos x = 0\\ -\sin 2x + \cos 2x = -3 \text{ (vô nghiệm do } 1 + 1 < 9)\end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow x = (2k + 1)\frac{\pi}{2},\ k \in \mathbb{Z}. \blacksquare$$

Bài 70. Giải phương trình: $\cos^4 x + \sin^4\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{4}$ (*)

Giải

Ta có: (*) $\Leftrightarrow \frac{1}{4}(1 + \cos 2x)^2 + \frac{1}{4}\left[1 - \cos\left(2x + \frac{\pi}{2}\right)\right]^2 = \frac{1}{4}$

$$\Leftrightarrow (1 + \cos 2x)^2 + (1 + \sin 2x)^2 = 1$$

$$\Leftrightarrow \cos 2x + \sin 2x = -1$$

$$\Leftrightarrow \cos\left(2x - \frac{\pi}{4}\right) = -\frac{1}{\sqrt{2}} = \cos\frac{3\pi}{4}$$

$$\Leftrightarrow 2x - \frac{\pi}{4} = \pm\frac{3\pi}{4} + k2\pi$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2} + k\pi \vee x = -\frac{\pi}{4} + k\pi,\ k \in \mathbb{Z}. \blacksquare$$

Bài 71. Giải phương trình:

$$4\sin^3 x.\cos 3x + 4\cos^3 x.\sin 3x + 3\sqrt{3}\cos 4x = 3 \text{ (*)}$$

Giải

Ta có: (*)

$$\Leftrightarrow 4\sin^3 x(4\cos^3 x - 3\cos x) + 4\cos^3 x(3\sin x - 4\sin^3 x) + 3\sqrt{3}\cos 4x = 3$$

$$\Leftrightarrow -12\sin^3 x\cos x + 12\sin x\cos^3 x + 3\sqrt{3}\cos 4x = 3$$

$$\Leftrightarrow 4\sin x\cos x(-\sin^2 x + \cos^2 x) + \sqrt{3}\cos 4x = 1$$

$$\Leftrightarrow 2\sin2x.\cos2x + \sqrt{3}\cos4x = 1 \Leftrightarrow \sin4x + \frac{\sin\frac{\pi}{3}}{\cos\frac{\pi}{3}}\cos4x = 1$$

$$\Leftrightarrow \sin4x.\cos\frac{\pi}{3} + \sin\frac{\pi}{3}\cos4x = \cos\frac{\pi}{3} \Leftrightarrow \sin\left(4x + \frac{\pi}{3}\right) = \sin\frac{\pi}{6}$$

$$\Leftrightarrow 4x + \frac{\pi}{3} = \frac{\pi}{6} + k2\pi \vee 4x + \frac{\pi}{3} = \frac{5\pi}{6} + k2\pi,\ k \in \mathbb{Z}$$

$$\Leftrightarrow x = -\frac{\pi}{24} + \frac{k\pi}{2} \vee x = \frac{\pi}{8} + \frac{k\pi}{2},\ k \in \mathbb{Z} \quad \blacksquare$$

Bài 72. Cho phương trình: $2\sin^2x - \sin x\cos x - \cos^2x = m$ (*)

a) Tìm m sao cho phương trình có nghiệm

b) Giải phương trình khi $m = -1$

Giải

Ta có: (*) $\Leftrightarrow (1 - \cos2x) - \frac{1}{2}\sin2x - \frac{1}{2}(1 + \cos2x) = m$

$$\Leftrightarrow \sin2x + 3\cos2x = -2m + 1$$

a) (*) có nghiệm $\Leftrightarrow a^2 + b^2 \geq c^2 \Leftrightarrow 1 + 9 \geq (1 - 2m)^2$

$$\Leftrightarrow 4m^2 - 4m - 9 \leq 0 \Leftrightarrow \frac{1 - \sqrt{10}}{2} \leq m \leq \frac{1 + \sqrt{10}}{2}$$

b) Khi $m = -1$ ta được phương trình $\sin2x + 3\cos2x = 3$ (1)

- Nếu $x = (2k + 1)\frac{\pi}{2}$ thì $\sin2x = 0$ và $\cos2x = -1$ nên (1) không thỏa mãn.
- Nếu $x \neq (2k + 1)\frac{\pi}{2}$ thì $\cos x \neq 0$, đặt $t = \tan x$

(1) thành $\frac{2t}{1 + t^2} + \frac{3(1 - t^2)}{1 + t^2} = 3$

$$\Leftrightarrow 2t + 3(1 - t^2) = 3(t^2 + 1)$$

$$\Leftrightarrow 6t^2 - 2t = 0 \Leftrightarrow t = 0 \vee t = 3$$

$$\Leftrightarrow x = k\pi \vee x = \arctan3 + k\pi\ (k \in \mathbb{Z}) \quad \blacksquare$$

BÀI TẬP TỰ GIẢI

1. Giải các phương trình sau:

a) $2\sqrt{2}(\sin x + \cos x)\cos x = 3 + \cos 2x$

b) $(2\cos x - 1)(\sin x + \cos x) = 1$

c) $2\cos 2x = \sqrt{6}(\cos x - \sin x)$

d) $3\sin x = 3 - \sqrt{3}\cos x$

e) $2\cos 3x + \sqrt{3}\sin x + \cos x = 0$

f) $\cos x + \sqrt{3}\sin x = \sin 2x + \cos x + \sin x$

g) $\cos x + \sqrt{3}\sin x = \dfrac{3}{\cos x + \sqrt{3}\sin x + 1}$

h) $\sin x + \cos x = \cos 2x$

k) $4\sin^3 x - 1 = 3\sin x - \sqrt{3}\cos 3x$

i) $3\cos x + 4\sin x + \dfrac{6}{3\cos x + 4\sin x + 1} = 6$

l) Tìm $x \in (0, \pi)$ thỏa: $4\sin^2\dfrac{x}{2} - \sqrt{3}\cos 2x = 1 + 2\cos^2\left(x - \dfrac{3\pi}{4}\right)$

m) $2\sin\left(2x - \dfrac{\pi}{6}\right) + 4\sin x + 1 = 0$

2. Cho phương trình: $\cos x + m\sin x = 2$ (1)

a) Giải (1) khi $m = \sqrt{3}$

b) Tìm m để (1) có nghiệm

3. Cho phương trình: $\dfrac{2\sin x + \cos x + 1}{\sin x - 2\cos x + 3} = a$ (2)

a) Giải (2) khi $a = \dfrac{1}{2}$

b) Tìm a để (2) có nghiệm

IV. Phương trình đối xứng theo sinx, cosx:

$$a(\sin x + \cos x) + b\sin x\cos x = c \qquad (1)$$

Cách giải

Đặt $t = \sin x + \cos x$ với điều kiện $|t| \le \sqrt{2}$

Thì t = $\sqrt{2}\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)$ hay t = $\sqrt{2}\cos\left(x-\frac{\pi}{4}\right)$

Ta có: $t^2 = 1 + 2\sin x\cos x$ nên (1) thành $at + \frac{b}{2}(t^2 - 1) = c$

$\Leftrightarrow bt^2 + 2at - b - 2c = 0$

Giải (2) tìm được t, rồi so với điều kiện $|t| \le \sqrt{2}$

Giải phương trình $\sqrt{2}\sin\left(x-\frac{\pi}{4}\right) = t$ ta tìm được x.

Bài 73. Giải phương trình $\sqrt{2}(\sin x + \cos x) = \tan x + \cot x$ (*)

Giải

Điều kiện $\begin{cases}\sin x \ne 0\\ \cos x \ne 0\end{cases} \Leftrightarrow \sin 2x \ne 0$

Lúc đó (*) $\Leftrightarrow \sqrt{2}(\sin x + \cos x) = \dfrac{\sin x}{\cos x} + \dfrac{\cos x}{\sin x}$

$\Leftrightarrow \sqrt{2}(\sin x + \cos x) = \dfrac{\sin^2 x + \cos^2 x}{\sin x\cos x} = \dfrac{1}{\sin x\cos x}$

Đặt $t = \sin x + \cos x = \sqrt{2}\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)$

Thì $t^2 = 1 + 2\sin x\cos x$ với $|t| \le \sqrt{2}$ và $t^2 \ne 1$

(*) thành $\sqrt{2}t = \dfrac{2}{t^2 - 1} \Leftrightarrow t(t^2 - 1) = \sqrt{2}$ (Đk $t \ne \pm 1$)

$\Leftrightarrow t^3 - t - \sqrt{2} = 0 \Leftrightarrow t = \sqrt{2}$

Vậy (*) $\Leftrightarrow \sqrt{2}\sin\left(x-\frac{\pi}{4}\right) = \sqrt{2} \Leftrightarrow \sin\left(x-\frac{\pi}{4}\right) = 1$

$\Leftrightarrow x + \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{2} + k2\pi, k \in Z$

$\Leftrightarrow x = \frac{\pi}{4} + k2\pi, k \in Z.$ ■

Bài 74. Giải phương trình: $2\sin^3 x - \sin x = 2\cos^3 x - \cos x + \cos 2x$ (*)

Giải

Ta có: (*) $\Leftrightarrow 2(\sin^3 x - \cos^3 x) - (\sin x - \cos x) + \sin^2 x - \cos^2 x = 0$

$\Leftrightarrow \sin x - \cos x = 0$ hay $2(1 + \sin x\cos x) - 1 + (\sin x + \cos x) = 0$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{ll} \sin x - \cos x = 0 & (1) \\ \sin x + \cos x + \sin 2x + 1 = 0 & (2) \end{array}\right.$$

- $(1) \Leftrightarrow \tan x = 1 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{4} + k\pi, k \in Z$

- Xét (2) đặt $t = \sin x + \cos x = \sqrt{2}\cos x\left(x - \frac{\pi}{4}\right)$ Với điều kiện: $|t| \le \sqrt{2}$

thì: $t^2 = 1 + \sin 2x$

Vậy (2) thành $t + (t^2 - 1) + 1 = 0 \Leftrightarrow t(t + 1) = 0 \Leftrightarrow t = 0 \vee t = -1$

Khi $t = 0$ thì $\cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = 0$

$$\Leftrightarrow x - \frac{\pi}{4} = (2k + 1)\frac{\pi}{2}, k \in Z$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{3\pi}{4} + k\pi, k \in Z$$

Khi $t = -1$ thì $\cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = -\frac{1}{\sqrt{2}} = \cos\frac{3\pi}{4}$

$$\Leftrightarrow x - \frac{\pi}{4} = \pm\frac{3\pi}{4} + k2\pi, k \in Z$$

$$\Leftrightarrow x = \pi + k2\pi \text{ hay } x = -\frac{\pi}{2} + k2\pi, k \in Z. ■$$

Bài 75. Giải phương trình:

$$\sin x + \sin^2 x + \sin^3 x + \sin^4 x = \cos x + \cos^2 x + \cos^3 x + \cos^4 x \quad (*)$$

Giải

Ta có: (*): $\Leftrightarrow (\sin x - \cos x) + (\sin^2 x - \cos^2 x) + (\sin^3 x - \cos^3 x)$
$+ (\sin^4 x - \cos^4 x) = 0$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} (\sin x - \cos x) = 0 \\ 1 + (\sin x + \cos x) + (1 + \sin x.\cos x) + (\sin x + \cos x) = 0 \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{ll} \sin x = \cos x & (1) \\ 2(\sin x + \cos x) + \sin x\cos x + 2 = 0 & (2) \end{array}\right.$$

Ta có: $(1) \Leftrightarrow \tan x = 1 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{4} + k\pi, k \in Z$

Xét (2): đặt $t = \sin x + \cos x = \sqrt{2}\cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right)$

Với điều kiện $|t| < \sqrt{2}$ thì $t^2 = 1 + 2\sin x\cos x$

(2) thành $2t + \dfrac{t^2 - 1}{2} + 2 = 0$

$\Leftrightarrow t^2 + 4t + 3 = 0$

$\Leftrightarrow t = -1 \vee t = -3$ (loại)

Khi $t = -1$ thì $\cos\left(x - \dfrac{\pi}{4}\right) = -\dfrac{1}{\sqrt{2}} = \cos\dfrac{3\pi}{4}$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x - \dfrac{\pi}{4} = \dfrac{3\pi}{4} + k2\pi,\ k \in Z \\ x - \dfrac{\pi}{4} = -\dfrac{3\pi}{4} + k2\pi,\ k \in Z \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \pi + k2\pi,\ k \in Z \\ x = -\dfrac{\pi}{2} + k2\pi,\ k \in Z. \end{array}\right.$$ ■

Bài 76*. Giải phương trình $3(\cot x - \cos x) - 5(\tan x - \sin x) = 2$ (*)

Giải

Với điều kiện $\sin 2x \neq 0$, nhân 2 vế phương trình cho $\sin x\cos x \neq 0$ thì: (*) $\Leftrightarrow 3\cos^2 x(1 - \sin x) - 5\sin^2 x(1 - \cos x) = 2\sin x\cos x$

$\Leftrightarrow 3\cos^2 x(1 - \sin x) - 5\sin^2 x(1 - \cos x) = 5\sin x\cos x - 3\sin x\cos x$

$\Leftrightarrow 3\cos x[\cos x(1 - \sin x) + \sin x] - 5\sin x[\sin x(1 - \cos x) + \cos x] = 0$

$\Leftrightarrow 3\cos x(\cos x - \sin x\cos x + \sin x) - 5\sin x(\sin x - \sin x\cos x + \cos x) = 0$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{ll} \sin x + \cos x - \sin x\cos x = 0 & (1) \\ 3\cos x - 5\sin x = 0 & (2) \end{array}\right.$$

• Giải (1) Đặt $t = \sin x + \cos x = \sqrt{2}\sin\left(x - \dfrac{\pi}{4}\right)$ thì $t^2 = 1 + 2\sin x\cos x$

với điều kiện: $|t| \leq \sqrt{2}$ và $t \neq \pm 1$

(1) thành: $t - \dfrac{t^2 - 1}{2} = 0 \Leftrightarrow t^2 - 2t - 1 = 0$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t = 1 + \sqrt{2} \text{ (loại do } |t| \leq \sqrt{2}) \\ t = 1 - \sqrt{2} \text{ (nhận so với điều kiện)} \end{array}\right.$$

vậy $\sin\left(x - \dfrac{\pi}{4}\right) = \dfrac{1 - \sqrt{2}}{2}$

$\Leftrightarrow x + \dfrac{\pi}{4} = \arcsin\dfrac{1 - \sqrt{2}}{2} + k2\pi \vee x + \dfrac{\pi}{4} = \pi - \arcsin\dfrac{1 - \sqrt{2}}{2} + k2\pi$

$\Leftrightarrow x = -\dfrac{\pi}{4} + \arcsin\dfrac{1 - \sqrt{2}}{2} + k2\pi \vee x = \dfrac{3\pi}{4} - \arcsin\dfrac{1 - \sqrt{2}}{2} + k2\pi$

Ta có: (2) $\Leftrightarrow \tan x = \dfrac{3}{5} \Leftrightarrow x = \arctan\dfrac{3}{5} \Leftrightarrow x = \arctan\dfrac{3}{5} + k\pi$. ■

Bài 77*. Giải phương trình

$$3\tan^3 x - \tan x + \frac{3(1+\sin x)}{\cos^2 x} = 8\cos^2\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{2}\right) \quad (*)$$

Giải

Điều kiện: $\cos x \neq 0 \Leftrightarrow \sin x \neq \pm 1$

Lúc đó: $(*) \Leftrightarrow \tan x(3\tan^2 x - 1) + 3(1+\sin x)(1+\tan^2 x)$

$$= 4\left[1 + \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right)\right] = 4(1 + \sin x)$$

$$\Leftrightarrow \tan x(3\tan^2 x - 1) + (1+\sin x)\,[3(1+\tan^2 x) - 4] = 0$$

$$\Leftrightarrow (3\tan^2 x - 1)(\tan x + 1 + \sin x) = 0$$

$$\Leftrightarrow (3\tan^2 x - 1)(\sin x + \cos x + \sin x\cos x) = 0$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{ll} 3\tan^2 x = 1 & (1) \\ \sin x + \cos x + \sin x\cos x = 0 & (2) \end{array}\right.$$

- $(1) \Leftrightarrow \tan^2 x = \frac{1}{3} \Leftrightarrow \tan x = \pm\frac{\sqrt{3}}{3} \Leftrightarrow x = \pm\frac{\pi}{6} + k\pi$
- Giải (2) đặt $t = \sin x + \cos x = \sqrt{2}\sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$ Với điều kiện $|t| \leq \sqrt{2}$

và $t \neq \pm 1$ thì $t^2 = 1 + 2\sin x\cos x$

(2) thành: $t + \frac{t^2 - 1}{2} = 0 \Leftrightarrow t^2 + 2t - 1 = 0$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t = -1 - \sqrt{2} \text{ (loại do điều kiện } |t| \leq \sqrt{2}) \\ t = -1 + \sqrt{2} \text{ (nhận so với điều kiện)} \end{array}\right.$$

Vậy $\sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2} - 1}{\sqrt{2}} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x + \frac{\pi}{4} = \arcsin\left(1 - \frac{1}{\sqrt{2}}\right) + k2\pi \\ x + \frac{\pi}{4} = \pi - \arcsin\left(1 - \frac{1}{\sqrt{2}}\right) + k2\pi \end{array}\right.$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = -\frac{\pi}{4} + \arcsin\left(1 - \frac{1}{\sqrt{2}}\right) + k2\pi \\ x = \frac{3\pi}{4} - \arcsin\left(1 - \frac{1}{\sqrt{2}}\right) + k2\pi . \blacksquare \end{array}\right.$$

Bài 78. Cho phương trình m(sinx + cosx + 1) = 1 + sin2x (*)

Tìm m để phương trình có nghiệm thuộc đoạn $\left[x - \frac{\pi}{2}\right]$

Giải

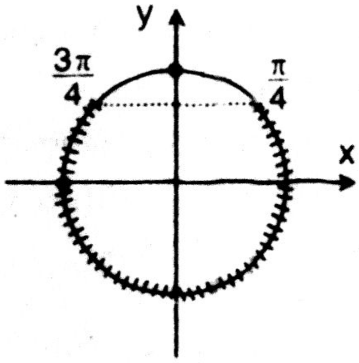
Đặt $t = \sin x + \cos x = \sqrt{2}\sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right)$, điều kiện $|t| \le \sqrt{2}$

Thì $t^2 = 1 + \sin 2x$

Vậy (*) thành: $m(t + 1) = t^2$

Nếu $0 \le x \le \frac{\pi}{2}$ thì $\frac{\pi}{4} \le x + \frac{\pi}{4} \le \frac{3\pi}{4}$

Do đó $\frac{\sqrt{2}}{2} \le \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) \le 1 \Leftrightarrow 1 \le t \le \sqrt{2}$



Thay vào (*) ta có: $m(t + 1) = t^2$

$\Leftrightarrow m = \frac{t^2}{t+1}$ (do t = −1 không là nghiệm của phương trình)

Xét $y = \frac{t^2}{t+1}$ trên $[1, \sqrt{2}]$

Thì $y' = \frac{t^2 + 2t}{(t+1)^2} > 0\ \forall t \in [1, \sqrt{2}] \Rightarrow$ y tăng trên $[1, \sqrt{2}]$

Vậy (*) có nghiệm trên $\left(1, \frac{\pi}{2}\right) \Leftrightarrow y(1) \le m \le y(\sqrt{2})$

$\Leftrightarrow \frac{1}{2} \le m \le 2(\sqrt{2} - 1)$. ■

- Chú ý 1: Phương trình giả đối xứng

$$a(\sin x - \cos x) + b(\sin x \cos x) = 0$$

đặt $t = \sin x - \cos x$ thì $t = \sqrt{2}\sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = -\sqrt{2}\cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$

với điều kiện $|t| \le \sqrt{2}$ thì $t^2 = 1 - 2\sin x\cos x$

Bài 79. Giải phương trình: $\cos 2x + 5 = 2(2 - \cos x)(\sin x - \cos x)$ (*)

Giải

Ta có: (*) $\Leftrightarrow (\cos^2 x - \sin^2 x) + 5 = 2(2 - \cos x)(\sin x - \cos x)$

$\Leftrightarrow (\sin x - \cos x)\,[2(2 - \cos x) + (\sin x + \cos x)] - 5 = 0$

$\Leftrightarrow (\sin x - \cos x)\,[\sin x - \cos x + 4] - 5 = 0$

Đặt $t = \sin x - \cos x = \sqrt{2}\sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right)$ với điều kiện $|t| \le \sqrt{2}$

(*) thành: $t(t + 4) - 5 = 0 \Leftrightarrow t^2 + 4t - 5 = 0 \Leftrightarrow t = 1 \vee t = -5$ (loại)

Vậy (*) $\Leftrightarrow \sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{\sqrt{2}} = \sin\frac{\pi}{4}$

$$\Leftrightarrow x - \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{4} + k2\pi \vee x - \frac{\pi}{4} = \frac{3\pi}{4} + k2\pi,\ k \in Z$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2} + k2\pi \vee x = \pi + k2\pi,\ k \in Z.\ ■$$

Bài 80. Giải phương trình $\cos^3 x + \sin^3 x = \cos 2x$ (*)

Giải

Ta có (*) $\Leftrightarrow (\cos x + \sin x)(1 - \sin x\cos x) = \cos^2 x - \sin^2 x$

$\Leftrightarrow \cos x + \sin x = 0$ hay $1 - \sin x\cos x = \cos x - \sin x$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{ll} \sin x + \cos x = 0 & (1) \\ \sin x - \cos x - \sin x\cos x + 1 = 0 & (2) \end{array}\right.$$

Ta có: (1) $\Leftrightarrow \tan x = -1 \Leftrightarrow x = -\frac{\pi}{4} + k\pi,\ k \in Z$

Xét (2) đặt $t = \sin x - \cos x = \sqrt{2}\sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right)$ với điều kiện $|t| \Leftrightarrow \sqrt{2}$

Thì $t^2 = 1 - 2\sin x\cos x$

(2) thành $t - \frac{1 - t^2}{2} + 1 = 0 \Leftrightarrow t^2 + 2t + 1 = 0 \Leftrightarrow t = -1$

Vậy (2) $\Leftrightarrow \sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = -\frac{1}{\sqrt{2}} = \sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x - \frac{\pi}{4} = -\frac{\pi}{4} + k2\pi, k \in Z \\ x - \frac{\pi}{4} = -\frac{5\pi}{4} + k2\pi, k \in Z \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = k2\pi, k \in Z \\ x = -\frac{3\pi}{2} + k2\pi, k \in Z. \end{array}\right. ■$$

Bài 81. Cho phương trình $\cos^3x - \sin^3x = m$ (1)

a) Giải phương trình (1) khi m = 1.

b) Tìm m sao cho (1) có đúng hai nghiệm $x \in \left[-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right]$

Giải

Ta có (1) $\Leftrightarrow (\cos x - \sin x)(1 + \sin x\cos x) = m$

Đặt $t = \cos x - \sin x = \sqrt{2}\cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$ với điều kiện $|t| \leq \sqrt{2}$

Thì $t^2 = 1 - 2\sin x\cos x$

Vậy (1) thành: $t\left(1 + \frac{1 - t^2}{2}\right) = m \Leftrightarrow t(3 - t^2) = 2m$ (2)

a) Khi m = 1 thì (2) thành $t^3 - 3t + 2 = 0$

$\Leftrightarrow (t - 1)(t^2 + t - 2) = 0$

$\Leftrightarrow t = 1 \vee t = -2$ (loại)

Vậy $\cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}$

$\Leftrightarrow x + \frac{\pi}{4} = \pm\frac{\pi}{4} + k2\pi,\ k \in Z$

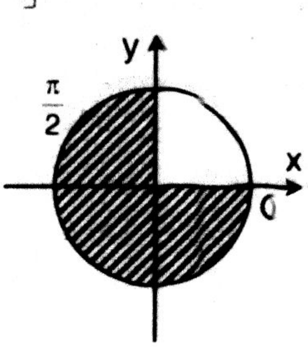
$\Leftrightarrow x = k2\pi \vee x = -\frac{\pi}{2} + k2\pi,\ k \in Z$

b) Nếu $x \in \left(-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right)$ thì $0 \leq x + \frac{\pi}{4} \leq \frac{\pi}{2}$

Nên $0 \leq \cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right) \leq 1 \Leftrightarrow 0 \leq t = \sqrt{2}\cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right) \leq \sqrt{2}$

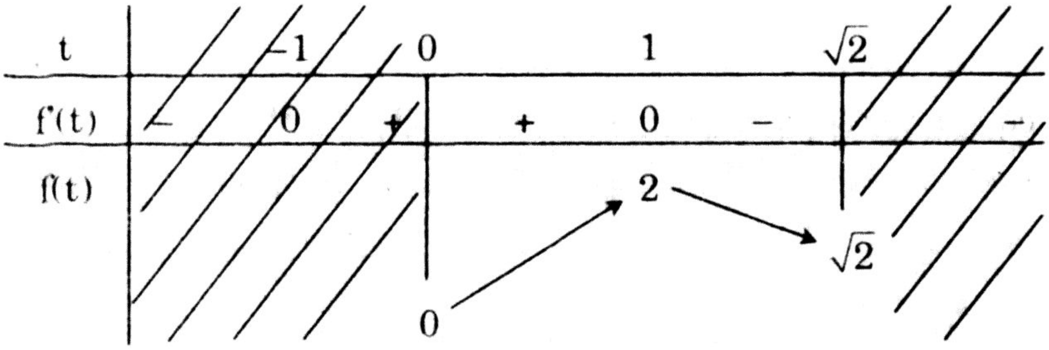
Nhận xét rằng với mỗi t tìm được trên $\left[0, \sqrt{2}\right]$

Ta tìm duy nhất một $x \in \left[-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right]$



Xét $f(t) = -t^3 + 3t$ trên $\left[0, \sqrt{2}\right]$

$\Rightarrow f'(t) = -3t^2 + 3$



Vậy (1) có đúng hai nghiệm $x \in \left[-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right]$

$\Leftrightarrow$ (d) y = 2m cắt (C) $t = -t^3 + 3t$ trên $\left[0, \sqrt{2}\right]$ tại 2 điểm phân biệt

$\Leftrightarrow \sqrt{2} < 2m < 2 \Leftrightarrow \frac{\sqrt{2}}{2} \leq m < 1$.■

Chú ý: Phương trình lượng giác dạng

$$\mathbf{a(\tan x \pm \cot x) + b(\tan^2 x + \cot^2 x) = 0}$$

Ta đặt $t = \tan x \pm \cot x$ thì $t^2 = \tan^2 x + \cot^2 x \pm 2$

Khi $t = \tan x + \cot x = \frac{2}{\sin 2x}$ thì $|t| \geq 2$ (do $|\sin 2x| \leq 1$)

Bài 82. Giải phương trình

$$3\tan^2 x + 4\tan x + 4\cot x + 3\cot^2 x + 2 = 0 \ (*)$$

Giải

Đặt $t = \tan x + \cot x = \frac{2}{\sin 2x}$ với điều kiện $|t| \geq 2$

Thì $t^2 = \tan^2 x + \cot^2 x + 2$

(*) thành: $3(t^2 - 2) + 4t + 2 = 0 \Leftrightarrow 3t^2 + 4t - 4 = 0$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t = \frac{3}{2} \text{ (loại do điều kiện)} \\ t = -2 \end{array}\right.$$

Ta có: $t = -2 \Leftrightarrow \frac{2}{\sin 2x} = -2 \Leftrightarrow \sin 2x = -1$

$$\Leftrightarrow 2x = -\frac{\pi}{2} + k2\pi, k \in Z \Leftrightarrow x = -\frac{\pi}{4} + k\pi, k \in Z.$$■

Bài 83. Giải phương trình

$$\tan x + \tan^2 x + \tan^3 x + \cot x + \cot^2 x + \cot^3 x = 6 \ (*)$$

Giải

Ta có (*) $\Leftrightarrow (\tan x + \cot x) + (\tan^2 x + \cot^2 x) + (\tan^3 x + \cot^3 x) = 6$

$\Leftrightarrow (\tan x + \cot x) + (\tan x + \cot x)^2 - 2 + (\tan x + \cot x)(\tan^2 x + \cot^2 x - 1) = 6$

$\Leftrightarrow (\tan x + \cot x) + (\tan x + \cot x)^2 + (\tan x + \cot x)[(\tan x + \cot x)^2 - 3] = 8$

Đặt $t = \tan x + \cot x = \dfrac{2}{\sin 2x}$ (điều kiện $|t| \geq 2$)

Vậy (*) thành: $t + t^2 + t(t^3 - 3) = 8$

$$\Leftrightarrow t^3 + t^2 - 2t - 8 = 0 \Leftrightarrow (t-2)(t^2 + 3t + 4) = 0$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t = 2 \\ t^2 + 3t + 4 = 0 \text{ (vô nghiệm)} \end{array}\right. \Leftrightarrow t = 2$$

Vậy $\dfrac{2}{\sin 2x} = 2 \Leftrightarrow \sin 2x = 1$

$$\Leftrightarrow 2x = \frac{\pi}{2} + k2\pi,\ k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{4} + k\pi,\ k \in \mathbb{Z}. ■$$

Bài 84. Giải phương trình

$$\frac{2}{\sin^2 x} + 2\tan^2 x + 5\tan x + 5\cot x + 4 = 0 \ (*)$$

Giải

Cách 1: (*) $\Leftrightarrow 2(1 + \cot^2 x) + 2\tan^2 x + 5(\tan x + \cot x) + 4 = 0$

$\Leftrightarrow 2(\tan^2 x + \cot^2 x) + 5(\tan x + \cot x) + 6 = 0$

$\Leftrightarrow 2[(\tan x + \cot x)^2 - 2] + 5(\tan x + \cot x) + 6 = 0$

Đặt $t = \tan x + \cot x = \dfrac{2}{\sin 2x}$, với $|t| \geq 2$

Ta được phương trình: $2t^2 + 5t + 2 = 0 \Leftrightarrow t = -2 \vee t = -\dfrac{1}{2}$ (loại)

Vậy (*) $\Leftrightarrow \dfrac{2}{\sin 2x} = -2 \Leftrightarrow \sin 2x = -1 \Leftrightarrow 2x = -\dfrac{\pi}{2} + k2\pi,\ k \in \mathbb{Z}.$

$$\Leftrightarrow x = -\frac{\pi}{4} + k\pi$$

Cách 2: Đặt $u = \tan x$ (với điều kiện $u \neq 0$)

Vậy (*) thành: $2 + \dfrac{2}{u^2} + 2u^2 + 5u + \dfrac{5}{u} + 4 = 0$

$$\Leftrightarrow 2 + 2u^4 + 5u^3 + 5u + 6u^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow (u + 1)(2u^3 + 3u^2 + 3u + 2) = 0$$

$$\Leftrightarrow (u + 1)^2(2u^2 + u + 2) = 0$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} u = -1 \text{ (nhận)} \\ 2u^2 + u + 2 = 0 \text{ (vô nghiệm)} \end{array}\right.$$

Vậy (*) $\Leftrightarrow \tan x = -1 \Leftrightarrow x = -\dfrac{\pi}{4} + k\pi$. ■

BÀI TẬP TỰ GIẢI

1. Giải các phương trình:

a) $1 + \cos^3 x - \sin^3 x = \sin x$

b) $\cos^3 x + \cos^2 x + 2\sin x - 2 = 0$

c) $\cos 2x + 5 = 2(2 - \cos x)(\sin x - \cos x)$

d) $\cot x - \tan x = \sin x + \cos x$

e) $\sin^3 x - \cos^3 x = \sin x - \cos x$

f) $1 + \tan x = \sin x + \cos x$

g) $\sin 2x + \sqrt{2}\sin\left(x - \dfrac{\pi}{4}\right) = 1$

k) $\sin 2x - 12(\sin x - \cos x) + 12 = 0$

l) $\dfrac{\sin x + \cos x}{\sin 2x + 1} = 1$

m) $\dfrac{1 - \cos 2x}{1 + \cos 2x} = \dfrac{1 - \cos^3 x}{1 - \sin^3 x}$

n) $5(\sin x + \cos x) + \sin 3x = 2\sqrt{2}(2 + \sin 2x)$

o) $1 + \sin x + \cos x + \sin 2x + 2\cos 2x = 0$

p) $\sin^2 x\cos x - \cos 2x + \sin x = \cos^2 x\sin x + \cos x$

r) $\cos 2x + 5 = 2(2 - \cos x)(\sin x - \cos x)$

s) $\cos^2 x + \sin^3 x + \cos x = 0$

t) $4\sin^3 x - 1 = 2\sin x - \sqrt{3}\cos 3x$

r) $\cos 2x + (1 + 2\cos x)(\sin x - \cos x) = 0$

2. Cho phương trình $\sin2x(\sin x + \cos x) = m$ (1)

a) Chứng minh nếu $|m| > \sqrt{2}$ thì (1) vô nghiệm.

b) Giải phương trình khi $|m| = \sqrt{2}$.

3. Cho phương trình $\sin2x + 4(\cos x - \sin x) = m$

a) Giải phương trình khi $m = 4$.

b) Tìm m để phương trình có nghiệm.

V. Phương trình thuần nhất bậc hai theo sinx và cosx

$$a\sin^2u + b\sin u\cos u + c\cos^2u = d$$

Cách giải:

- Tìm nghiệm $u = \frac{\pi}{2} + k\pi$ (lúc đó $\cos u = 0$ và $\sin u = \pm1$)
- Chia hai vế phương trình cho $\cos^2u \neq 0$ ta được phương trình:

$$a\tan^2u + b\tan u + c = d(1 + \tan^2u)$$

Đặt $t = \tan u$ ta có phương trình:

$$(a - d)t^2 + bt + c - d = 0$$

Giải phương trình tìm được $t = \tan u$

Bài 85. Giải phương trình: $\cos^2x - \sqrt{3}\sin2x = 1 + \sin^2x$ (*)

Giải

- Khi $\cos x = 0$ thì $\sin x = \pm1$ lúc đó (*) thành: $0 = 2$ vô nghiệm
- Cho 2 vế phương trình (*) cho $\cos^2x \neq 0$

Đặt $t = \tan x$ ta được: $(*) \Leftrightarrow 1 - 2\sqrt{3}t = (1 + t^2) + t^2$

$$\Leftrightarrow t^2 - \sqrt{3}t = 0 \Leftrightarrow t = 0 \vee t = \sqrt{3}$$

Vậy $\tan x = 0 \Leftrightarrow x = k\pi$

$\tan x = \sqrt{3} \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{3} + k\pi$. ■

Bài 86. Giải phương trình: $\cos^3x - 4\sin^3x - 3\cos x\sin^2x + \sin x = 0$ (*)

Giải

- Khi $x = \frac{\pi}{2} + k\pi$ thì $\cos x = 0$ và $\sin x = \pm1$ thì (*) vô nghiện
- Do $\cos x = 0$ không là nghiệm nên chia hai vế của (*) cho $\cos^3x$

Ta có $(*) \Leftrightarrow 1 - 4\tan^3 x - 3\tan^2 x + \tan x\left(1 + \tan^2 x\right) = 0$

$$\Leftrightarrow 3\tan^3 x + 3\tan^2 x - \tan x - 1 = 0$$

$$\Leftrightarrow (\tan x + 1)\left(3\tan^2 x - 1\right) = 0$$

$$\Leftrightarrow \tan x = -1 \vee \tan x = \pm\frac{\sqrt{3}}{3}$$

$$\Leftrightarrow x = -\frac{\pi}{4} + k\pi \vee x = \pm\frac{\pi}{6} + k\pi, k \in \mathbb{Z}. \blacksquare$$

Bài 87. Giải phương trình: $3\cos^4 x - 4\sin^2 x\cos^2 x + \sin^4 x = 0(*)$

Giải

Do cosx = 0 không là nghiệm nên chia hai vế của (*) cho $\cos^4 x \neq 0$

Ta có: $(*) \Leftrightarrow 3 - 4\tan^2 x + \tan^4 x = 0$

$$\Leftrightarrow \tan^2 x = 1 \vee \tan^2 x = 3$$

$$\Leftrightarrow \tan x = \pm 1 = \tan\left(\pm\frac{\pi}{4}\right) \vee \tan x = \tan\left(\pm\frac{\pi}{3}\right)$$

$$\Leftrightarrow x = \pm\frac{\pi}{4} + k\pi \vee x = \pm\frac{\pi}{3} + k\pi, k \in \mathbb{Z}. \blacksquare$$

Bài 88. Giải phương trình: $\sin 2x + 2\tan x = 3\ (*)$

Giải

Chia hai vế của (*) cho $\cos^2 x \neq 0$ ta được:

$$(*) \Leftrightarrow \frac{2\sin x\cos x}{\cos^2 x} + \frac{2\tan x}{\cos^2 x} = \frac{3}{\cos^2 x}$$

$$\Leftrightarrow 2\tan x + 2\tan x(1 + \tan^2 x) = 3(1 + \tan^2 x)$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} t = \tan x \\ 2t^3 - 3t^2 + 4t - 3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t = \tan x \\ (t - 1)\left(2t^2 - t + 3\right) = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \tan x = 1 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{4} + k\pi, k \in \mathbb{Z}.\blacksquare$$

Bài 89. Giải phương trình: $\sin x\sin 2x + \sin 3x = 6\cos^3 x\ (*)$

Giải

Ta có: $(*) \Leftrightarrow 2\sin^2 x\cos x + 3\sin x - 4\sin^3 x = 6\cos^3 x$

- Khi cosx = 0 (sinx = ±1) thì (*) vô nghiệm

- Chia hai vế phương trình (*) cho $\cos^3 x \neq 0$ ta được

$$(*) \Leftrightarrow \frac{2\sin^2 x}{\cos^2 x} + \frac{3\sin x}{\cos x}\cdot\frac{1}{\cos^2 x} - 4\frac{\sin^3 x}{\cos^3 x} = 6$$

$$\Leftrightarrow 2\tan^2 x + 3\tan x\left(1+\tan^2 x\right) - 4\tan^3 x = 6$$

$$\Leftrightarrow \tan^3 x - 2\tan^2 x - 3\tan x + 6 = 0$$

$$\Leftrightarrow (\tan x - 2)\left(\tan^2 x - 3\right) = 0$$

$$\Leftrightarrow \tan x = 2 = \tan\alpha \vee \tan x = \pm\sqrt{3}$$

$$\Leftrightarrow x = \arctan\alpha + k\pi \vee x = \pm\frac{\pi}{3} + k\pi, k \in \mathbb{Z}.\ ■$$

Bài 90. (Tuyển sinh Đại học khối A, 2003)

Giải phương trình: $\cot x - 1 = \dfrac{\cos 2x}{1+\tan x} + \sin^2 x - \dfrac{1}{2}\sin 2x\,(*)$

Giải

Điều kiện $\sin 2x \neq 0$ và $\tan x \neq -1$

Ta có: $\dfrac{\cos 2x}{1+\tan x} = \dfrac{\cos^2 x - \sin^2 x}{1+\dfrac{\sin x}{\cos x}} = \dfrac{\cos x\left(\cos^2 x - \sin^2 x\right)}{\cos x + \sin x}$

$= \cos x(\cos x - \sin x)$ (do $\tan x \neq -1$ nên $\sin x + \cos x \neq 0$)

Do đó: $(*) \Leftrightarrow \dfrac{\cos x}{\sin x} - 1 = \left(\cos^2 x - \sin x\cos x\right) + \sin^2 x - \dfrac{1}{2}\sin 2x$

$$\Leftrightarrow \frac{\cos x - \sin x}{\sin x} = 1 - \sin 2x$$

$$\Leftrightarrow (\cos x - \sin x) = \sin x(\cos x - \sin x)^2$$

$$\Leftrightarrow \cos x - \sin x = 0 \text{ hay } 1 = \sin x(\cos x - \sin x)\,(**)$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \tan x = 1 \text{ (nhận so với } \tan x \neq -1) \\ \dfrac{1}{\cos^2 x} = \dfrac{\sin x}{\cos x} - \tan^2 x \text{ (do } \cos x \neq 0) \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \dfrac{\pi}{4} + k\pi, k \in \mathbb{Z} \\ 2\tan^2 x - \tan x + 1 = 0 \text{(vô nghiệm)} \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{\pi}{4} + k\pi, k \in \mathbb{Z} \text{ (nhận do } \sin 2x \neq 0).\ ■$$

Lưu ý: có thể làm cách khác

$$(**) \Leftrightarrow 1 - \frac{1}{2}\sin 2x + \frac{1}{2}(1 - \cos 2x) = 0$$

$$\Leftrightarrow 3 = \sin 2x + \cos 2x$$

$$\Leftrightarrow 3 = \sqrt{2}\sin\left(2x + \frac{\pi}{4}\right)$$: vô nghiệm

Bài 91. Giải phương trình $\sin 3x + \cos 3x + 2\cos x = 0$ (*)

Giải

Ta có: (*) $\Leftrightarrow (3\sin x - 4\sin^3 x) + (4\cos^3 x - 3\cos x) + 2\cos x = 0$

$$\Leftrightarrow 3\sin x - 4\sin^3 x + 4\cos^3 x - \cos x = 0$$

Vì $\cos x = 0$ không là nghiệm nên chia hai vế phương trình cho $\cos^3 x \neq 0$ ta được

$$(*) \Leftrightarrow 3\tan x(1 + \tan^2 x) - 4\tan^3 x + 4 - (1 + \tan^2 x) = 0$$

$$\Leftrightarrow \tan^3 x - \tan^2 x + 3\tan x + 3 = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} t = \tan x \\ t^3 + t^2 - 3t - 3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t = \tan x \\ (t + 1)(t^2 - 3) = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \tan x = -1 \vee \tan x = \pm\sqrt{3} \Leftrightarrow x = -\frac{\pi}{4} + k\pi \vee x = \pm\frac{\pi}{3} + k\pi, k \in \mathbb{Z}.\ \blacksquare$$

Bài 92. Giải phương trình: $6\sin x - 2\cos^3 x = \dfrac{5\sin 4x.\cos x}{2\cos 2x}$ (*)

Giải

Điều kiện: $\cos 2x \neq 0 \Leftrightarrow \cos^2 x - \sin^2 x \neq 0 \Leftrightarrow \tan x \neq \pm 1$

$$\text{Ta có: } (*) \Leftrightarrow \begin{cases} 6\sin x - 2\cos^3 x = \dfrac{10\sin 2x\cos 2x\cos x}{2\cos 2x} \\ \cos 2x \neq 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 6\sin x - 2\cos^3 x = 5\sin 2x\cos x \\ \tan x \neq \pm 1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 6\sin x - 2\cos^3 x = 10\sin x\cos^2 x \quad (**) \\ \tan x \neq \pm 1 \end{cases}$$

Do $\cos x = 0$ không là nghiệm của (**), chia hai vế phương trình (**) cho $\cos^3 x$ ta được

$$(**) \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{6\tan x}{\cos^2 x} - 2 = 10\text{tg}x \\ \tan x \neq \pm 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t = \tan x \text{ với } t \neq \pm 1 \\ 6t(1 + t^2) - 2 = 10t \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} t = \tan x \text{ với } t \neq \pm 1 \\ 3t^3 - 2t - 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t = \tan x \text{ với } t \neq \pm 1 \\ (t - 1)(3t^2 + 3t + 1) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow t \in \varnothing$$

Vậy (*) vô nghiệm. ■

Bài 93. Giải phương trình $\sin x - 4\sin^3 x + \cos x = 0$ (*)

Giải

Vì $\cos x = 0$ không là nghiệm nên chia hai vế phương trình cho $\cos^3 x$ thì:

$$(*) \Leftrightarrow \tan x(1 + \tan^2 x) - 4\tan^3 x + 1 + \tan^2 x = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} t = \tan x \\ -3t^3 + t^2 + t + 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t = \tan x \\ (t - 1)(3t^2 + 2t + 1) = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \tan x = 1 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{4} + k\pi,\ k \in \mathbb{Z}. \blacksquare$$

Bài 94. Giải phương trình $\tan x \sin^2 x - 2\sin^2 x = 3(\cos 2x + \sin x \cos x)$ (*)

Giải

Chia hai vế của phương trình (*) cho $\cos^2 x \neq 0$

Ta được $(*) \Leftrightarrow \tan^3 x - 2\tan^2 x = \dfrac{3(\cos^2 x - \sin^2 x + \sin x\cos x)}{\cos^2 x}$

$$\Leftrightarrow \tan^3 x - 2\tan^2 x = 3(1 - \tan^2 x + \tan x)$$

$$\Leftrightarrow \tan^3 x + \tan^2 x - 3\tan x - 3 = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} t = \tan x \\ t^3 + t^2 - 3t - 3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t = \tan x \\ (t + 1)(t^2 - 3) = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \tan x = -1 \vee \tan x = \pm\sqrt{3} \Leftrightarrow x = -\frac{\pi}{4} + k\pi \vee x = \pm\frac{\pi}{3} + k\pi, k \in \mathbb{Z} \blacksquare$$

Bài 95. Cho phương trình:

$(4 - 6m)\sin^3 x + 3(2m - 1)\sin x + 2(m - 2)\sin^2 x\cos x - (4m - 3)\cos x = 0$ (*)

a) Giải phương trình khi m = 2

b) Tìm m để phương trình (*) có duy nhất một nghiệm trên $\left[0, \frac{\pi}{4}\right]$

Giải

- Khi $x = \frac{\pi}{2} + k\pi$ thì $\cos x = 0$ và $\sin x = \pm 1$ nên

(*) thành: $(4 - 6m) + 3(2m - 1) = 0 \Leftrightarrow 1 = 0$ vô nghiệm

- Chia hai vế (*) cho $\cos^3 \neq 0$ thì

$(*) \Leftrightarrow (1 - 6m)\tan^3x + 3(2m - 1)\tan x(1 - \tan^2x)$
$+ 2(m - 2)\tan^2x - (4m - 3)(1 - \tan^2x) = 0$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} t = \tan x \\ t^3 - (2m + 1)t^2 + 3(2m - 1)t - 4m + 3 = 0 \quad (**) \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} t = \tan x \\ (t - 1)(t^2 - 2mt + 4m - 3) = 0 \end{cases}$$

a) Khi $m = 2$ thì (*) thành $\begin{cases} t = \tan x \\ (t - 1)(t^2 - 4t + 5) = 0 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \tan x = 1 \Leftrightarrow x = \dfrac{\pi}{4} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$

b) Ta có: $x \in \left[0, \dfrac{\pi}{4}\right]$ thì $\tan x = t \in [0, 1]$

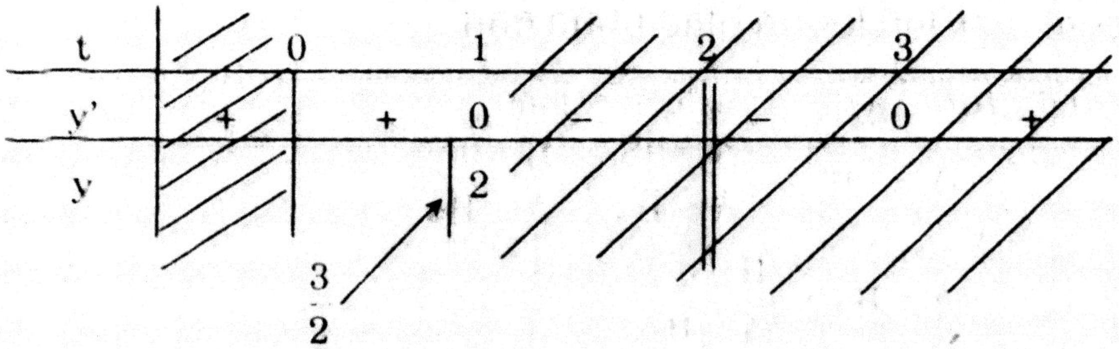
Xét phương trình: $t^2 - 2mt + 4m - 3 = 0 \quad (2)$

$\Leftrightarrow t^2 - 3 = 2m(t - 2)$

$\Leftrightarrow \dfrac{t^2 - 3}{t - 2} = 2m$ (do $t = 2$ không là nghiệm)

Đặt $y = f(t) = \dfrac{t^2 - 3}{t - 2}$ (C) và (d) $y = 2m$

Ta có: $y' = f'(t) = \dfrac{t^2 - 4t + 3}{(t - 2)^2}$



Do (**) luôn có nghiệm $t = 1 \in [0, 1]$ trên yêu cầu bài toán

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \text{(d) } y = 2m \text{ không có điểm chung với (C)} \\ \text{(d) cắt (C) tại 1 điểm duy nhất } t = 1 \end{array}\right.$$

$\Leftrightarrow 2m < \dfrac{3}{2} \vee 2m \geq 2 \Leftrightarrow m < \dfrac{3}{4} \vee m \geq 1$. ■

BÀI TẬP TỰ GIẢI

1. Giải các phương trình sau:

a) $\cos^3x + \sin x - 3\sin^2x\cos x = 0$

b) $\sin^2x(\tan x + 1) = 3\sin x(\cos x - \sin x) + 3$

c) $2\cos^2x + \cos 2x + \sin x = 0$

d) $\tan^3x = \dfrac{1 - \cos^3x}{1 - \sin^3x}$

e) $\sin^3x - 5\sin^2x\cos x - 3\sin x\cos^2x + 3\cos^3x = 0$

f) $\cos^3x + \sin x - 3\sin^2x\cos x = 0$

g) $2\sqrt{2}\cos^3\left(x - \dfrac{\pi}{4}\right) - 3\cos x - \sin x = 0$

h) $\sin^3x + \cos^3x = \sin x - \cos x$

k) $3\tan^2x + 4\tan x + 4\cot x + 3\cot^2x + 2 = 0$

m) $3\tan^2x - \tan x + \dfrac{3(1 + \sin x)}{\cos^2x} - 8\cos^2\left(\dfrac{\pi}{4} - \dfrac{x}{2}\right) = 0$

n) $4(\sin^2x + \cos^3x) = \cos x + 3\sin x$

2. Cho phương trình: $\sin^2x + 2(m - 1)\sin x\cos x - (m + 1)\cos^2x = m$

a) Tìm m để phương trình có nghiệm

b) Giải phương trình khi $m = -2$

ĐS: $m \in [-2, 1]$

V. Phương trình lượng giác chứa căn

Cách giải: Áp dụng các công thức

$$\sqrt{A} = \sqrt{B} \Leftrightarrow \begin{cases} A \ge 0 \\ A = B \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} B \ge 0 \\ A = B \end{cases}$$

$$\sqrt{A} = B \Leftrightarrow \begin{cases} B \ge 0 \\ A = B^2 \end{cases}$$

Ghi chú: *Do theo chương trình đã bỏ phần bất phương trình lượng giác nên ta xử lý điều kiện $B \ge 0$ bằng phương pháp thử lại hay so với điều kiện.*

Bài 96. Giải phương trình $\sqrt{5\cos x - \cos 2x} + 2\sin x = 0$ (*)

Giải

Ta có: (*) $\Leftrightarrow \sqrt{5\cos x - \cos 2x} = -2\sin x$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \sin x \le 0 \\ 5\cos x - \cos 2x = 4\sin^2 x \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \sin x \le 0 \\ 5\cos x - \left(2\cos^2 x - 1\right) = 4\left(1 - \cos^2 x\right) \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \sin x \le 0 \\ 2\cos^2 x + 5\cos x - 3 = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \sin x \le 0 \\ \cos x = \dfrac{1}{2} \vee \cos x = -3 (\text{loại}) \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \sin x \le 0 \\ x = \pm\dfrac{\pi}{3} + k2\pi, k \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow x = -\frac{\pi}{3} + k2\pi,\ k \in \mathbb{Z}. \blacksquare$$

Bài 97. Giải phương trình

$$\sin^3 x + \cos^3 x + \sin^3 x\cot x + \cos^3 x\tan x = \sqrt{2\sin 2x}$$

Giải

Điều kiện: $\begin{cases} \cos x \ne 0 \\ \sin x \ne 0 \\ \sin 2x \ge 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sin 2x \ne 0 \\ \sin 2x \ge 0 \end{cases} \Leftrightarrow \sin 2x > 0$

Lúc đó: $(*) \Leftrightarrow \sin^3 x + \cos^3 x + \sin^2 x\cos x + \cos^2 x\sin x = \sqrt{2\sin 2x}$

$$\Leftrightarrow \sin^2 x(\sin x + \cos x) + \cos^2 x(\cos x + \sin x) = \sqrt{2\sin 2x}$$

$$\Leftrightarrow (\sin x + \cos x)\left(\sin^2 x + \cos^2 x\right) = \sqrt{2\sin 2x}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \sin x + \cos x \ge 0 \\ (\sin x + \cos x)^2 = 2\sin 2x \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{2}\sin\left(x + \dfrac{\pi}{4}\right) \ge 0 \\ 1 + \sin 2x = 2\sin 2x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sin\left(x + \dfrac{\pi}{4}\right) \ge 0 \\ \sin 2x = 1 \ (\text{nhận so với đk } \sin 2x > 0) \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \sin\left(x + \dfrac{\pi}{4}\right) \ge 0 \\ x = \dfrac{\pi}{4} + k\pi, k \in \mathbb{Z} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sin\left(x + \dfrac{\pi}{4}\right) \ge 0 \\ x = \dfrac{\pi}{4} + m2\pi \vee x = \dfrac{5\pi}{4} + m2\pi (\text{loại}) \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{\pi}{4} + m2\pi,\ m \in \mathbb{Z}. \blacksquare$$

Bài 98. Giải phương trình $\dfrac{\sqrt{1-\sin 2x}+\sqrt{1+\sin 2x}}{\sin x}=4\cos x \quad (*)$

Giải

Điều kiện $\sin x \neq 0$

Ta có: $(*) \Leftrightarrow \sqrt{1-\sin 2x}+\sqrt{1+\sin 2x}=2\sin 2x$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2+2\sqrt{1-\sin^2 2x}=4\sin^2 2x \\ \sin 2x \geq 0 \text{ và } \sin x \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{1-\sin^2 2x}=2\sin^2 2x-1 \\ \sin 2x \geq 0 \text{ và } \sin x \neq 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 1-\sin^2 2x=4\sin^4 2x-4\sin^2 2x+1 \\ \sin^2 2x \geq \dfrac{1}{2} \\ \sin 2x \geq 0 \text{ và } \sin x \neq 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \sin^2 2x\left(4\sin^2 2x-3\right)=0 \\ \sin 2x \geq \dfrac{1}{\sqrt{2}} \text{ và } \sin x \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sin 2x=\dfrac{\sqrt{3}}{2} \vee \sin 2x=\dfrac{-\sqrt{3}}{2} \\ \sin 2x \geq \dfrac{\sqrt{2}}{2} \text{ và } \sin x \neq 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \sin 2x=\frac{\sqrt{3}}{2} \Leftrightarrow 2x=\frac{\pi}{3}+k2\pi \vee 2x=\frac{2\pi}{3}+k2\pi, k \in \mathbb{Z}$$

$$\Leftrightarrow x=\frac{\pi}{6}+k\pi \vee x=\frac{\pi}{3}+k\pi, k \in \mathbb{Z}. \blacksquare$$

Chú ý: Có thể đưa về phương trình chứa giá trị tuyệt đối

$$(*) \Leftrightarrow \begin{cases} \sin x \neq 0 \\ |\cos x-\sin x|+|\cos x+\sin x|=2\sin 2x \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow |\cos x-\sin x|+|\cos x+\sin x|=2\sin 2x$$

Bài 99. Giải phương trình:

$$\sin x+\sqrt{3}\cos x+\sqrt{\sin x+\sqrt{3}\cos x}=2 \, (*)$$

Giải

Đặt $t=\sin x+\sqrt{3}\cos x=\sin x+\dfrac{\sin\frac{\pi}{3}}{\cos\frac{\pi}{3}}\cos x$

$$\Leftrightarrow t = \frac{1}{\cos\frac{\pi}{3}}\sin\left(x + \frac{\pi}{3}\right) = 2\sin\left(x + \frac{\pi}{3}\right)$$

(*) thành: $\Leftrightarrow \sqrt{t} = 2 - t$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2 - t \geq 0 \\ t = 4 - 4t + t^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t \leq 2 \\ t^2 - 5t + 4 = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} t \leq 2 \\ t = 1 \vee t = 4 \end{cases} \Leftrightarrow t = 1$$

Do đó (*) $\Leftrightarrow \sin\left(x + \frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{2} \Leftrightarrow x + \frac{\pi}{3} = \frac{\pi}{6} + k2\pi$

hoặc $x + \frac{\pi}{3} = \frac{5\pi}{6} + k2\pi, k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow x = -\frac{\pi}{6} + k2\pi \vee x = \frac{\pi}{2} + k2\pi, k \in \mathbb{Z}$. ■

Bài 100. Giải phương trình:

$$3\sqrt{\tan x + 1}(\sin x + 2\cos x) = 5(\sin x + 3\cos x) \quad (*)$$

Giải

Chia hai vế của (*) cho cosx ≠ 0 ta được

$$(*) \Leftrightarrow 3\sqrt{\tan x + 1}(\tan x + 2) = 5(\tan x + 3)$$

Đặt $u = \sqrt{\tan x + 1}$ với $u \geq 0$ thì $u^2 - 1 = \tan x$

Vậy (*) thành $3u\left(u^2 + 1\right) = 5\left(u^2 + 2\right)$

$$\Leftrightarrow 3u^3 - 5u^2 + 3u - 10 = 0$$

$$\Leftrightarrow (u - 2)\left(3u^2 + u + 5\right) = 0 \Leftrightarrow u = 2$$

Do đó (*) $\Leftrightarrow \sqrt{\tan x + 1} = 2 \Leftrightarrow \tan x + 1 = 4 \Leftrightarrow x = \arctan 3 + k\pi$. ■

Bài 101. Giải phương trình

$$\sin^3 x\,(1 + \cot x) + \cos^3 x(1 + \tan x) = 2\sqrt{\sin x \cos x} \quad (*)$$

Giải

Điều kiện: $\cos x \neq 0 \wedge \sin x \neq 0 \wedge \sin x\cos x \geq 0 \Leftrightarrow \sin 2x > 0$

Lúc đó: (*) $\Leftrightarrow \sin^3 x\left(\frac{\sin x + \cos x}{\sin x}\right) + \cos^3 x\left(\frac{\cos x + \sin x}{\cos x}\right) = 2\sqrt{\sin x\cos x}$

$$\Leftrightarrow (\sin x + \cos x)(\sin^2 x + \cos^2 x) = 2\sqrt{\sin x\cos x}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \sin x + \cos x \geq 0 \\ 1 + \sin 2x = 2\sin 2x \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \sin x + \cos x \geq 0 \\ \sin 2x = 1 \text{ (nhận được điều kiện } \sin 2x > 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \sin\left(x + \dfrac{\pi}{4}\right) \geq 0 \\ x = \dfrac{\pi}{4} + k\pi, k \in \mathbb{Z} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sin\left(x + \dfrac{\pi}{4}\right) \geq 0 \\ x + \dfrac{\pi}{4} = \dfrac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \sin\left(x + \dfrac{\pi}{4}\right) \geq 0 \\ x + \dfrac{\pi}{4} = \dfrac{\pi}{2} + h2\pi \text{ hay } x + \dfrac{\pi}{4} = \dfrac{3\pi}{2} + h2\pi, h \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{\pi}{4} + h2\pi, h \in \mathbb{Z}. \blacksquare$$

BÀI TẬP TỰ GIẢI

1. Giải phương trình:

a) $\sqrt{1 + \sin x} + \cos x = 0$

b) $\dfrac{\cos\dfrac{4x}{3} - \cos^2 x}{\sqrt{1 - \tan^2 x}} = 0$

c) $\sin x + \sqrt{3}\cos x = \sqrt{2 + \cos 2x + \sqrt{3}\sin 2x}$

d) $\sqrt{\sin^2 x - 2\sin x + 2} = 2\sin x - 1$

e) $2\sqrt{3\sin x} = \dfrac{3\tan x}{2\sqrt{\sin x} - 1} - \sqrt{3}$

f) $\dfrac{\sin^2 2x + \cos^4 2x - 1}{\sqrt{\sin x \cos x}} = 0$

g) $8\cos 4x \cos^2 2x + \sqrt{1 - \cos 3x} + 1 = 0$

h) $\sqrt{\sin x} + \sin x + \sin^2 x + \cos x = 1$

k) $\sqrt{5 - 3\sin^2 x - 4\cos x} = 1 - 2\cos x$

l) $\cos 2x = \cos^2 x \sqrt{1 + \tan x}$

m) $\sqrt{1 - \sin x} + \sqrt{1 - \cos x} = 1$

2. Cho phương trình: $\sqrt{1+\sin x}+\sqrt{1-\sin x}=m\cos x$ (1)

a) Giải phương trình khi $m = 2$

b) Giải và biện luận theo m phương trình (1)

VII. Phương trình lượng giác chứa giá trị tuyệt đối

Cách giải:

1. Mở giá trị tuyệt đối bằng định nghĩa
2. Áp dụng
   - $|A| = |B| \Leftrightarrow A = \pm B$
   - $|A| = B \Leftrightarrow \begin{cases} B \ge 0 \\ A = \pm B \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} B \ge 0 \\ A^2 = B^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A \ge 0 \\ A = B \end{cases} \vee \begin{cases} A < 0 \\ A = -B \end{cases}$

Bài 102. Giải phương trình $|\cos 3x| = 1 - \sqrt{3}\sin 3x$ (*)

Giải

Ta có: $(*) \Leftrightarrow \begin{cases} 1 - \sqrt{3}\sin 3x \ge 0 \\ \cos^2 3x = 1 - 2\sqrt{3}\sin 3x + 3\sin^2 3x \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \sin 3x \le \dfrac{1}{\sqrt{3}} \\ 1 - \sin^2 3x = 1 - 2\sqrt{3}\sin 3x + 3\sin^2 3x \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \sin 3x \le \dfrac{1}{\sqrt{3}} \\ 4\sin^2 3x - 2\sqrt{3}\sin 3x = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sin 3x \le \dfrac{1}{\sqrt{3}} \\ \sin 3x = 0 \vee \sin 3x = \dfrac{\sqrt{3}}{2} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \sin 3x = 0 \Leftrightarrow x = \frac{k\pi}{3}, k \in \mathbb{Z}. \blacksquare$$

Bài 103. Giải phương trình $3\sin x + 2|\cos x| - 2 = 0$ (*)

Giải

Ta có: $(*) \Leftrightarrow 2|\cos x| = 2 - 3\sin x$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2 - 3\sin x \ge 0 \\ 4\cos^2 x = 4 - 12\sin x + 9\sin^2 x \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \sin x \le \dfrac{2}{3} \\ 4(1 - \sin^2 x) = 4 - 12\sin x + 9\sin^2 x \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \sin x \le \dfrac{2}{3} \\ 13\sin^2 x - 12\sin x = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sin x \le \dfrac{2}{3} \\ \sin x = 0 \vee \sin x = \dfrac{12}{13} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \sin x = 0 \Leftrightarrow x = k\pi, k \in \mathbb{Z}. \blacksquare$$

Bài 104. Giải phương trình $\sin x\cos x + |\sin x + \cos x| = 1 (*)$

Giải

Đặt $t = |\sin x + \cos x| = \sqrt{2}\left|\sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right)\right|$ với điều kiện: $0 \le t \le \sqrt{2}$ thì

$t^2 = 1 + 2\sin x\cos x$

Do đó (*) thành: $\dfrac{t^2 - 1}{2} + t = 1$

$$\Leftrightarrow t^2 + 2t - 3 = 0 \Leftrightarrow t = 1 \vee t = -3 (\text{loại})$$

Vậy $(*) \Leftrightarrow 1^2 = 1 + 2\sin x\cos x \Leftrightarrow \sin 2x = 0 \Leftrightarrow x = \dfrac{k\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}. \blacksquare$

Bài 105. Giải phương trình $|\sin x - \cos x| + 2\sin 2x = 1 (*)$

Giải

Đặt $t = |\sin x - \cos x|$ (điều kiện $0 \le t \le \sqrt{2}$) thì $t^2 = 1 - \sin 2x$

(*) thành: $t + 2(1 - t^2) = 1$

$$\Leftrightarrow 2t^2 - t - 1 = 0 \Leftrightarrow t = 1 \vee t = -\frac{1}{2} (\text{loại do điều kiện } t \ge 0)$$

Khi $t = 1$ thì $1^2 = 1 - \sin 2x \Leftrightarrow \sin 2x = 0 \Leftrightarrow x = \dfrac{k\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}. \blacksquare$

Bài 106. Giải phương trình $\sin^4 x - \cos^4 x = |\sin x| + |\cos x| \quad (*)$

Giải

Ta có: $(*) \Leftrightarrow (\sin^2 x + \cos^2 x)(\sin^2 x - \cos^2 x) = |\sin x| + |\cos x|$

$$\Leftrightarrow -\cos 2x = |\sin x| + |\cos x|$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -\cos 2x \ge 0 \\ \cos^2 2x = 1 + 2|\sin x||\cos x| \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \cos 2x \le 0 \\ 1 - \sin^2 2x = 1 + |\sin 2x| \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \cos 2x \le 0 \\ |\sin 2x| = -\sin^2 2x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \cos 2x \le 0 \\ \sin 2x = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \cos 2x \le 0 \\ \cos^2 2x = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \cos 2x = -1 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}. \blacksquare$$

Bài 107. Giải phương trình $\sqrt{3}\sin 2x - 2\cos^2 x = 2\sqrt{2 + 2\cos 2x}$ (*)

Giải

Ta có: (*) $\Leftrightarrow 2\sqrt{3}\sin x\cos x - 2\cos^2 x = 2\sqrt{2 + 2\left(2\cos^2 x - 1\right)}$

$$\Leftrightarrow \cos x\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\sin x - \frac{1}{2}\cos x\right) = |\cos x|$$

$$\Leftrightarrow \cos x.\sin\left(x - \frac{\pi}{6}\right) = |\cos x|$$

$$\Leftrightarrow \cos x = 0 \vee \begin{cases} \cos x > 0 \\ \sin\left(x - \frac{\pi}{6}\right) = 1 \end{cases} \vee \begin{cases} \cos x < 0 \\ \sin\left(x - \frac{\pi}{6}\right) = -1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \cos x = 0 \vee \begin{cases} \cos x > 0 \\ x - \frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{2} + k2\pi,\ k \in \mathbb{Z} \end{cases} \vee \begin{cases} \cos x < 0 \\ x - \frac{\pi}{6} = -\frac{\pi}{2} + k2\pi, k \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z} \vee \begin{cases} \cos x > 0 \\ x = \frac{2\pi}{3} + k2\pi, k \in \mathbb{Z} \end{cases} \vee \begin{cases} \cos x < 0 \\ x = -\frac{\pi}{3} + k2\pi, k \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}. \blacksquare$$

Bài 108. Tìm các nghiệm trên $(0, 2\pi)$ của phương trình:

$$\frac{\sin 3x - \sin x}{\sqrt{1 - \cos 2x}} = \sin 2x + \cos 2x \qquad (*)$$

Giải

Ta có: (*) $\Leftrightarrow \dfrac{2\cos 2x\sin x}{\sqrt{2}|\sin x|} = \sqrt{2}\cos\left(2x - \dfrac{\pi}{4}\right)$

Điều kiện: $\sin x \neq 0 \Leftrightarrow x \neq k\pi$

- Khi $x \in (0, \pi)$ thì $\sin x > 0$ nên:

$$(*) \Leftrightarrow \sqrt{2}\cos 2x = \sqrt{2}\cos\left(2x - \frac{\pi}{4}\right)$$

$$\Leftrightarrow 2x = \pm\left(2x - \frac{\pi}{4}\right) + k2\pi, k \in \mathbb{Z}$$

$$\Leftrightarrow 4x = \frac{\pi}{4} + k2\pi, k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{16} + \frac{k\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}$$

Do $x \in (0, \pi)$ nên $x = \dfrac{\pi}{16}$ hoặc $x = \dfrac{9\pi}{16}$

- Khi $x \in (\pi, 2\pi)$ thì $\sin x < 0$ nên:

$$(*) \Leftrightarrow -\cos 2x = \cos\left(2x - \frac{\pi}{4}\right)$$

$$\Leftrightarrow \cos(\pi - 2x) = \cos\left(2x - \frac{\pi}{4}\right)$$

$$\Leftrightarrow 2x - \frac{\pi}{4} = \pm(\pi - 2x) + k2\pi, k \in \mathbb{Z}$$

$$\Leftrightarrow 4x = \frac{5\pi}{4} + k2\pi, k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow x = \frac{5\pi}{16} + \frac{k\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}$$

Do $x \in (\pi, 2\pi)$ nên $x = \dfrac{21\pi}{16} \vee x = \dfrac{29\pi}{16}$. ■

Bài 109. Cho phương trình: $\sin^6 x + \cos^6 x = a|\sin 2x|$ (*)

Tìm a sao cho phương trình có nghiệm.

Giải

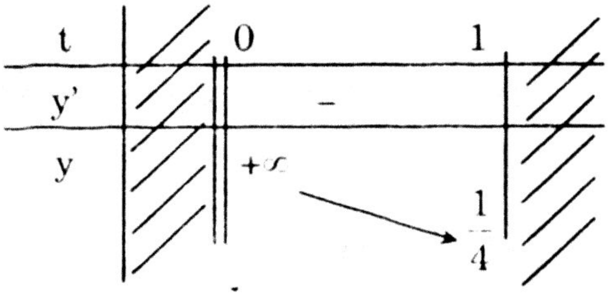
Ta có: $\sin^6 x + \cos^6 x = (\sin^2 x + \cos^2 x)(\sin^4 x - \sin^2 x\cos^2 x + \cos^4 x)$

$$= (\sin^2 x + \cos^2 x)^2 - 2\sin^2 x\cos^2 x = 1 - \frac{3}{4}\sin^2 x\cos^2 x$$

Đặt $t = |\sin 2x|$ điều kiện $0 \le t \le 1$ thì (*) thành: $1 - \dfrac{3}{4}t^2 = at$ (**)

$$\Leftrightarrow \frac{1}{t} - \frac{3}{4}t = a \quad \text{(do } t = 0 \text{ thì (**) vô nghiệm)}$$

Xét $y = \dfrac{1}{t} - \dfrac{3}{4}t$ trên $D = (0, 1]$ thì $y' = -\dfrac{1}{t^2} - \dfrac{3}{4} < 0$



Do đó: (*) có nghiệm $\Leftrightarrow a \geq \frac{1}{4}$. ■

BÀI TẬP TỰ GIẢI

1. Giải các phương trình

a) $|\sin x - \cos x| = 1 - 4\sin 2x$

b) $4\sin x + 3|\cos x| = 3$

c) $|\mathrm{tg}x| = \cot x + \frac{1}{\cos x}$

d) $\frac{1}{\sin x}\sqrt{\frac{1}{1-\cos x}+\frac{1}{1+\cos x}} - \sqrt{2} = -\sqrt{2}\left(\frac{1+3\cos^2 x}{\sin^2 x}\right)$

e) $|\cot x| = \tan x + \frac{1}{\sin x}$

f) $2\cos x - |\sin x| = 1$

g) $\frac{\sqrt{1+\cos x}+\sqrt{1-\cos x}}{\cos x} = 4\sin x$

h) $\frac{\sqrt{1-\cos 2x}}{\sin x} = \sqrt{2}\left(\cos x - \frac{1}{2}\right)$

m) $\sqrt{\cos 2x} + \sqrt{1+\sin 2x} = \sqrt{\frac{\sin^3 x + \cos^3 x}{2}}$

n) $|\cos x| + \sin 3x = 0$

o) $\frac{\tan^2 x}{|\tan x - 1|} = |\tan x + 1| + \frac{1}{|\tan x - 1|}$

p) $|\sin x - \cos x| + |\sin x + \cos x| = 2$

q) $\frac{1}{\sqrt{8\cos^2 x}} = \sin x$

r) $|\cot x| = \tan x + \frac{1}{\sin x}$

s) $|\cos x + 2\sin 2x - \cos 3x| = 1 + 2\sin x - \cos 2x$

2. Tìm tham số a dương sao cho phương trình $|\sin x + \cos x| + a\sin 2x = 1$ có nghiệm

3. Cho phương trình: $|\sin x - \cos x| + 4\sin 2x = m$

a) Giải phương trình khi $m = 0$

b) Tìm m để phương trình có nghiệm

VIII. Phương trình lượng giác không mẫu mực

Trường hợp 1: Tổng hai số không âm

Áp dụng: Nếu $\begin{cases} A \geq 0 \wedge B \geq 0 \\ A + B = 0 \end{cases}$ thì $A = B = 0$

Bài 110. Giải phương trình:

$$4\cos^2 x + 3\text{tg}^2 x - 4\sqrt{3}\cos x + 2\sqrt{3}\text{tg}x + 4 = 0(*)$$

Giải

Ta có: $(*) \Leftrightarrow \left(2\cos x - \sqrt{3}\right)^2 + \left(\sqrt{3}\tan x + 1\right)^2 = 0$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \cos x = \dfrac{\sqrt{3}}{2} \\ \tan x = -\dfrac{1}{\sqrt{3}} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \pm\dfrac{\pi}{6} + k2\pi,\ k \in \mathbb{Z} \\ \tan x = -\dfrac{1}{\sqrt{3}} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow x = -\frac{\pi}{6} + k2\pi,\ k \in \mathbb{Z}.\blacksquare$$

Bài 111. Giải phương trình: $8\cos 4x.\cos^2 2x + \sqrt{1 - \cos 3x} + 1 = 0(*)$

Giải

Ta có: $(*) \Leftrightarrow 4\cos 4x(1 + \cos 4x) + 1 + \sqrt{1 - \cos 3x} = 0$

$$\Leftrightarrow \left(4\cos^2 4x + 4\cos 4x + 1\right) + \sqrt{1 - \cos 3x} = 0$$

$$\Leftrightarrow (2\cos 4x + 1)^2 + \sqrt{1 - \cos 3x} = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \cos 4x = -\dfrac{1}{2} \\ \cos 3x = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \cos 4x = -\dfrac{1}{2} \\ 3x = k2\pi, k \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \cos 4x = -\dfrac{1}{2} \\ x = \dfrac{k2\pi}{3}, k \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \cos 4x = -\dfrac{1}{2} \\ x = -\dfrac{2\pi}{3} + m2\pi \text{ hay } x = m2\pi \text{ hay } x = \dfrac{2\pi}{3} + m2\pi, m \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

$\Leftrightarrow x = \pm\dfrac{2\pi}{3} + m2\pi,\ m \in \mathbb{Z}$ (ta nhận $k = \pm 1$ và loại $k = 0$). ■

Trường hợp 2: Phương pháp đối lập

Nếu $\begin{cases} A \le M \le B \\ A = B \end{cases}$ thì $A = B = M$

Bài 112. Giải phương trình: $\sin^4 x - \cos^4 x = |\sin x| + |\cos x|$ (*)

Giải

Ta có: (*) $\Leftrightarrow \sin^2 x - \cos^2 x = |\sin x| + |\cos x|$

$$\Leftrightarrow -\cos 2x = |\sin x| + |\cos x|$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \cos 2x \le 0 \\ \cos^2 2x = 1 + 2|\sin x||\cos x| \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \cos 2x \le 0 \\ -\sin^2 2x = |\sin 2x| \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \cos 2x \le 0 \\ \sin 2x = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \cos 2x \le 0 \\ \cos 2x = \pm 1 \end{cases}$$

$\Leftrightarrow \cos 2x = -1 \Leftrightarrow x = \dfrac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$. ■

Cách khác:

Ta có: $\sin^4 x - \cos^4 x \le \sin^4 x \le |\sin x| \le |\sin x| + |\cos x|$

Do đó (*) $\Leftrightarrow \begin{cases} \cos x = 0 \\ \sin^4 x = |\sin x| \end{cases} \Leftrightarrow \cos x = 0 \Leftrightarrow x = \dfrac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$

Bài 113. Giải phương trình: $(\cos 2x - \cos 4x)^2 = 6 + 2\sin 3x$ (*)

Giải

Ta có: (*) $\Leftrightarrow 4\sin^2 3x.\sin^2 x = 6 + 2\sin 3x$

- Do: $\sin^2 3x \le 1$ và $\sin^2 x \le 1$ nên $4\sin^2 3x\sin^2 x \le 4$
- Do $\sin 3x \ge -1$ nên $6 + 2\sin 3x \ge 4$

Vậy $4\sin^2 3x\sin^2 x \le 4 \le 6 + 2\sin 3x$

Dấu = của phương trình (*) xảy ra khi và chỉ khi

$$\begin{cases} \sin^2 3x = 1 \\ \sin^2 x = 1 \\ \sin 3x = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sin^2 x = 1 \\ \sin 3x = -1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = \pm\frac{\pi}{2} + k2\pi, k \in \mathbb{Z} \\ \sin 3x = -1 \end{cases} \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2} + k2\pi, k \in \mathbb{Z}. ■$$

Bài 114. Giải phương trình: $\frac{\cos^3 x - \sin^3 x}{\sqrt{\sin x} + \sqrt{\cos x}} = 2\cos 2x$ (*)

Giải

Điều kiện: $\sin x \ge 0 \wedge \cos x \ge 0$

Ta có:

$$(*) \Leftrightarrow (\cos x - \sin x)(1 + \sin x\cos x) = 2(\cos^2 x - \sin^2 x)\left(\sqrt{\sin x} + \sqrt{\cos x}\right)$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{ll} \cos x - \sin x = 0 & (1) \\ 1 + \sin x\cos x = 2(\cos x + \sin x)\left(\sqrt{\sin x} + \sqrt{\cos x}\right) & (2) \end{array}\right.$$

Ta có: • (1) $\Leftrightarrow \tan x = 1 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{4} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$

• Xét (2)

Ta có: khi $\sin x \ge 0$ thì $\sqrt{\sin x} \ge \sin x \ge \sin^2 x$

Tương tự $\sqrt{\cos x} \ge \cos x \ge \cos^2 x$

Vậy $\sin x + \cos x \ge 1$ và $\sqrt{\sin x} + \sqrt{\cos x} \ge 1$

Suy ra vế phải của (2) thì ≥ 2

Mà vế trái của (2): $1 + \frac{1}{2}\sin 2x \le \frac{3}{2}$

Do đó (2) vô nghiệm

Vậy: (*) $\Leftrightarrow x = \frac{\pi}{4} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$. ■

Bài 115. Giải phương trình: $\sqrt{3 - \cos x} - \sqrt{\cos x + 1} = 2$ (*)

Giải

Ta có: (*) $\Leftrightarrow \sqrt{3 - \cos x} = 2 + \sqrt{\cos x + 1}$

$$\Leftrightarrow 3 - \cos x = 5 + \cos x + 4\sqrt{\cos x + 1}$$

$$\Leftrightarrow -2(\cos x + 1) = 4\sqrt{\cos x + 1}$$

Ta có: $-2(\cos x + 1) \le 0 \ \forall x$ mà $4\sqrt{\cos x + 1} \ge 0 \ \forall x$

Do đó dấu = của (*) xảy ra $\Leftrightarrow \cos x = -1 \Leftrightarrow x = \pi + k2\pi \ , k \in \mathbb{Z}$. ■

Bài 116. Giải phương trình: $\cos 3x + \sqrt{2 - \cos^2 3x} = 2(1 + \sin^2 2x)$ (*)

Giải

Do bất đẳng thức Bunhiacốpski: $|AX + BY| \le \sqrt{A^2 + B^2}.\sqrt{X^2 + Y^2}$

nên: $\left|1\cos 3x + 1\sqrt{2 - \cos^2 3x}\right| \le \sqrt{2}.\sqrt{\cos^2 3x + \left(2 - \cos^2 3x\right)} = 2$

Dấu = xảy ra $\Leftrightarrow \cos 3x = \sqrt{2 - \cos^2 3x}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \cos 3x \ge 0 \\ \cos^2 3x = 2 - \cos^2 3x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \cos 3x \ge 0 \\ \cos 3x = \pm 1 \end{cases} \Leftrightarrow \cos 3x = 1$$

Mặt khác: $2(1 + \sin^2 2x) \ge 2$ dấu = xảy ra $\Leftrightarrow \sin 2x = 0$

Vậy: $\cos 3x + \sqrt{2 - \cos^2 3x} \le 2 \le 2\left(1 + \sin^2 2x\right)$

dấu = của (*) chỉ xảy ra khi: $\cos 3x = 1 \wedge \sin 2x = 0$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \cos 3x = 1 \\ x = \dfrac{k\pi}{2}, k \in \mathbb{Z} \end{cases} \Leftrightarrow x = 2m\pi,\ m \in \mathbb{Z}.$$ ■

Bài 117. Giải phương trình: $\tan^2 x + \cot^2 x = 2\sin^5\left(x + \dfrac{\pi}{4}\right)$ (*)

Giải

Điều kiện: $\sin 2x \ne 0$

- Do bất đẳng thức Cauchy: $\tan^2 x + \cot^2 x \ge 2$

  dấu = xảy ra khi $\tan x = \cot x$

- Mặt khác: $\sin\left(x + \dfrac{\pi}{4}\right) \le 1$ nên $2\sin^5\left(x + \dfrac{\pi}{4}\right) \le 2$

  dấu = xảy ra khi $\sin\left(x + \dfrac{\pi}{4}\right) = 1$

  Do đó: $\tan^2 x + \cot^2 x \ge 2 \ge 2\sin^5\left(x + \dfrac{\pi}{4}\right)$

Dấu = của (*) xảy ra $\Leftrightarrow \begin{cases} \tan x = \cot x \\ \sin\left(x + \dfrac{\pi}{4}\right) = 1 \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \tan^2 x = 1 \\ x = \dfrac{\pi}{4} + k2\pi, k \in \mathbb{Z} \end{cases} \Leftrightarrow x = \dfrac{\pi}{4} + k2\pi, k \in \mathbb{Z}\ . \blacksquare$$

Trường hợp 3:

Áp dụng: Nếu $\begin{cases} A \le M \text{ và } B \le M \\ A + B = M + N \end{cases}$ thì $\begin{cases} A = M \\ B = N \end{cases}$

Hệ quả: $\sin u + \sin v = 2 \Leftrightarrow \begin{cases} \sin u = 1 \\ \sin v = 1 \end{cases}$

$$\sin u - \sin v = 2 \Leftrightarrow \begin{cases} \sin u = 1 \\ \sin v = -1 \end{cases}$$

$$\sin u + \sin v = 2 \Leftrightarrow \begin{cases} \sin u = -1 \\ \sin v = -1 \end{cases}$$

Tương tự cho các trường hợp sau: $\sin u \pm \cos v = \pm 2$; $\cos u \pm \cos v = \pm 2$

Bài 118. Giải phương trình: $\cos 2x + \cos\dfrac{3x}{4} - 2 = 0 \qquad (*)$

Giải

Ta có: $(*) \Leftrightarrow \cos 2x + \cos\dfrac{3x}{4} = 2$

Do $\cos 2x < 1$ và $\cos\dfrac{3x}{4} \le 1$ nên dấu = của (*) chỉ xảy ra

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \cos 2x = 1 \\ \cos\dfrac{3x}{4} = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = k\pi, k \in \mathbb{Z} \\ x = \dfrac{8h\pi}{3}, h \in \mathbb{Z} \end{cases} \Leftrightarrow x = 8m\pi, m \in \mathbb{Z}$$

Do : $k\pi = \dfrac{8h\pi}{3} \Leftrightarrow k = \dfrac{8h}{3}$

Để k nguyên ta chọn $h = 3m (m \in \mathbb{Z})$ thì $k = 8m$. ■

Cách khác: $\begin{cases} \cos 2x = 1 \\ \cos\dfrac{3x}{4} = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = k\pi, k \in \mathbb{Z} \\ \cos\dfrac{3k\pi}{4} = 1 \end{cases} \Leftrightarrow x = 8m\pi, m \in \mathbb{Z}$

Bài 119. Giải phương trình:

$$\cos 2x + \cos 4x + \cos 6x = \cos x.\cos 2x.\cos 3x + 2 (*)$$

Giải

$$\cos 2x + \cos 4x + \cos 6x = 2\cos 3x\cos x + 2\cos^2 3x - 1$$

$$= 2\cos 3x(\cos x + \cos 3x) - 1 = 4\cos 3x.\cos 2x.\cos x - 1$$

Vậy: $\cos 3x.\cos 2x.\cos x = \frac{1}{4}(\cos 2x + 6\cos 4x + \cos 6x + 1)$

Do đó: $(*) \Leftrightarrow \cos 2x + \cos 4x + \cos 6x = \frac{1}{4}(\cos 2x + \cos 4x + \cos 6x) + \frac{9}{4}$

$$\Leftrightarrow \frac{3}{4}(\cos 2x + \cos 4x + \cos 6x) = \frac{9}{4}$$

$$\Leftrightarrow \cos 2x + \cos 4x + \cos 6x = 3$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \cos 2x = 1 \\ \cos 4x = 1 \\ \cos 6x = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x = k2\pi, k \in \mathbb{Z} & (1) \\ \cos 4x = 1 & (2) \\ \cos 6x = 1 & (3) \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow 2x = k2\pi,\ k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow x = k\pi,\ k \in \mathbb{Z}.\ \blacksquare$$

Bài 120. Giải phương trình:

$$\cos 2x - \sqrt{3}\sin 2x - \sqrt{3}\sin x - \cos x + 4 = 0\ (*)$$

Giải

Ta có: $(*) \Leftrightarrow 2 = \left(-\frac{1}{2}\cos 2x + \frac{\sqrt{3}}{2}\sin 2x\right) + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\sin x + \frac{1}{2}\cos x\right)$

$$\Leftrightarrow 2 = \sin\left(2x - \frac{\pi}{6}\right) + \sin\left(x + \frac{\pi}{6}\right)$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \sin\left(2x - \frac{\pi}{6}\right) = 1 \\ \sin\left(x + \frac{\pi}{6}\right) = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x - \frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{2} + k2\pi, k \in \mathbb{Z} \\ x + \frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{2} + h2\pi, h \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{\pi}{3} + k\pi, k \in \mathbb{Z} \\ x = \frac{\pi}{3} + h2\pi, h \in \mathbb{Z} \end{cases} \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{3} + h2\pi, h \in \mathbb{Z}.\ \blacksquare$$

Cách khác:

$$(*) \Leftrightarrow \begin{cases} \sin\left(2x - \dfrac{\pi}{6}\right) = 1 \\ \sin\left(x + \dfrac{\pi}{6}\right) = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sin\left(2x - \dfrac{\pi}{6}\right) = 1 \\ x + \dfrac{\pi}{6} = \dfrac{\pi}{2} + h2\pi, h \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \sin\left(2x - \dfrac{\pi}{6}\right) = 1 \\ x = \dfrac{\pi}{3} + h2\pi, h \in \mathbb{Z} \end{cases} \Leftrightarrow x = \dfrac{\pi}{3} + h2\pi, h \in \mathbb{Z}.$$

Bài 121. Giải phương trình: $4\cos x - 2\cos 2x - \cos 4x = 1$ (*)

Giải

Ta có: $(*) \Leftrightarrow 4\cos x - 2(2\cos^2 x - 1) - (1 - 2\sin^2 2x) = 1$

$\Leftrightarrow 4\cos x - 4\cos^2 x + 8\sin^2 x\cos^2 x = 0$

$\Leftrightarrow \cos x = 0$ hay $1 - \cos x + 2\sin^2 x\cos x = 0$

$\Leftrightarrow \cos x = 0$ hay $1 + \cos x(2\sin^2 x - 1) = 0$

$\Leftrightarrow \cos x = 0$ hay $1 - \cos x\cos 2x = 0$ (**)

$\Leftrightarrow \cos x = 0$ hay $1 - \dfrac{1}{2}(\cos 3x + \cos x) = 0$

$\Leftrightarrow \cos x = 0 \vee \cos 3x + \cos x = 2$

$\Leftrightarrow \cos x = 0 \vee \begin{cases} \cos 3x = 1 \\ \cos x = 1 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \cos x = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \cos x = 1 \\ 4\cos^3 x - 3\cos x = 1 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \cos x = 0 \vee \cos x = 1$

$\Leftrightarrow x = \dfrac{\pi}{2} + k\pi \vee x = k2\pi, k \in \mathbb{Z}.$ ■

Cách khác:

$(**) \Leftrightarrow \cos x = 0$ hay $\cos x\cos 2x = 1$

$$\Leftrightarrow \cos x = 0 \vee \begin{cases} \cos x = 1 \\ \cos 2x = 1 \end{cases} \vee \begin{cases} \cos x = -1 \\ \cos 2x = -1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow x = \dfrac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z} \vee \begin{cases} x = k2\pi, k \in \mathbb{Z} \\ \cos 2x = 1 \end{cases} \vee \begin{cases} x = \pi + k2\pi, k \in \mathbb{Z} \text{ (loại)} \\ \cos 2x = -1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow x = \dfrac{\pi}{2} + k\pi \vee x = k2\pi, k \in \mathbb{Z}.$$

Bài 122. Giải phương trình: $\tan 2x + \tan 3x + \dfrac{1}{\sin x\cos 2x\cos 3x} = 0$ (*)

Giải

Điều kiện: $\sin 2x\cos 2x\cos 3x \neq 0$

Lúc đó: $(*) \Leftrightarrow \dfrac{\sin 2x}{\cos 2x} + \dfrac{\sin 3x}{\cos 3x} + \dfrac{1}{\sin x.\cos 2x.\cos 3x} = 0$

$$\Leftrightarrow \sin 2x\sin x\cos 3x + \sin 3x\sin x.\cos 2x + 1 = 0$$

$$\Leftrightarrow \sin x(\sin 2x\cos 3x + \sin 3x\cos 2x) + 1 = 0$$

$$\Leftrightarrow \sin x.\sin 5x = -1$$

$$\Leftrightarrow -\frac{1}{2}(\cos 6x - \cos 4x) = -1$$

$$\Leftrightarrow \cos 6x - \cos 4x = 2$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases}\cos 6x = 1\\ \cos 4x = -1\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}t = \cos 2x\\ 4t^3 - 3t = 1\\ 2t^2 - 1 = -1\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}t = \cos 2x\\ 4t^3 - 3t = 1\\ t = 0\end{cases}$$

Do đó: (*) vô nghiệm. ■

Bài 123. Giải phương trình: $\cos^2 3x.\cos 2x - \cos^2 x = 0$ (*)

Giải

Cách 1:

Ta có: $(*) \Leftrightarrow \dfrac{1}{2}(1 + \cos 6x)\cos 2x - \dfrac{1}{2}(1 + \cos 2x) = 0$

$$\Leftrightarrow \cos 6x\cos 2x = 1 \Leftrightarrow \frac{1}{2}(\cos 8x + \cos 4x) = 1$$

$$\Leftrightarrow \cos 8x + \cos 4x = 2 \Leftrightarrow \begin{cases}\cos 8x = 1\\ \cos 4x = 1\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases}2\cos^2 4x - 1 = 1\\ \cos 4x = 1\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}\cos^2 4x = 1\\ \cos 4x = 1\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \cos 4x = 1 \Leftrightarrow 4x = k2\pi,\ k \in \mathbb{Z}$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{k\pi}{2},\ k \in \mathbb{Z}.$$ ■

Cách 2:

$$\Leftrightarrow \cos 6x\cos 2x = 1 \Leftrightarrow \begin{cases}\cos 2x = 1\\ \cos 6x = 1\end{cases} \text{ hoặc } \begin{cases}\cos 2x = -1\\ \cos 6x = -1\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2x = k2\pi,\ k \in \mathbb{Z} \\ \cos 6x = 1 \end{cases} \text{ hay } \begin{cases} 2x = \pi + k2\pi \\ \cos 6x = -1 \end{cases} \Leftrightarrow x = \frac{k\pi}{2},\ k \in \mathbb{Z}.$$

Cách 3:

$$\begin{cases} \cos 8x = 1 \\ \cos 4x = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \cos 8x = 1 \\ 4x = k2\pi,\ k \in \mathbb{Z} \end{cases} \Leftrightarrow x = \frac{k\pi}{2},\ k \in \mathbb{Z}.$$

Trường hợp 4: Dùng khảo sát hàm

Bài 124. Giải phương trình: $1 - \dfrac{x^2}{2} = \cos x$ (*)

Giải

Ta có: (*) $\Leftrightarrow 1 = \dfrac{x^2}{2} + \cos x$

Xét $y = \dfrac{x^2}{2} + \cos x$ trên $\mathbb{R}$

Ta có: $y' = x - \sin x$

Và $y'' = 1 - \cos x \geq 0\ \forall x \in \mathbb{R}$

Do đó $y'(x)$ là hàm đồng biến trên $\mathbb{R}$

Vậy $\forall x \in (0; \infty) : x > 0$ nên $y'(x) > y'(0) = 0$

$\forall x \in (-\infty; 0) : x < 0$ nên $y'(x) < y'(0) = 0$

Do đó:

x	$-\infty$		0		$+\infty$
y'		−	0	+	
y		↘	1	↗	

Vậy: $y = \dfrac{x^2}{2} + \cos x \geq \forall x \in \mathbb{R}$

Dấu = của (*) chỉ xảy ra tại $x = 0$

Do đó (*) $\Leftrightarrow x = 0$. ■

Bài 125. Giải phương trình: $\sin^4 x + \sin^6 x = \sin^8 x + \sin^{10} x$ (*)

Giải

Ta có:

$$\begin{cases} \sin^4 x \geq \sin^8 x \text{ và dấu = xảy ra khi và chỉ khi } \sin^2 x = 1 \text{ hoặc } \sin x = 0 \\ \sin^6 x \geq \sin^{10} x \text{ và dấu = xảy ra khi và chỉ khi } \sin^2 x = 1 \text{ hoặc } \sin x = 0 \end{cases}$$

$\Leftrightarrow \sin^2 x = 1 \vee \sin x = 0$

$\Leftrightarrow x = \pm \dfrac{\pi}{2} + k2\pi,\ k \in \mathbb{Z}$ hoặc $x = k\pi$. ■

Cách khác:

(*) $\Leftrightarrow \sin^4 x = 0$ hoặc $1 + \sin^2 x = \sin^4 x + \sin^6 x$

$\Leftrightarrow \sin x = 0$ hoặc $\sin^2 x = 1$.

BÀI TẬP TỰ GIẢI

Giải các phương trình sau:

a) $\lg(\sin^2 x) - 1 + \sin^3 x = 0$.

b) $\sin 4x - \cos 4x = 1 + 4\sqrt{2}\sin\left(x - \dfrac{\pi}{4}\right)$

c) $\sin^2 x + \dfrac{1}{4}\sin^2 3x = \sin x.\sin^2 3x$.

d) $\pi^{\sin x} = |\cos x|$.

e) $2\cos x + \sqrt{2}\sin 10x = 3\sqrt{2} + 2\cos 28x.\sin x$.

f) $(\cos 4x - \cos 2x)^2 = 5 + \sin 3x$.

g) $\sin x + \cos x = \sqrt{2}(2 - \sin 3x)$.

h) $\sin 3x(\cos 2x - 2\sin 3x) + \cos 3x(1 + \sin 2x - 2\cos 3x) = 0$.

k) $\tan x + \tan 2x = -\sin 3x\cos 2x$.

l) $2\log_a(\cos x) = \log_2(\cos x)$.

m) $2^{\sin x} = \cos x$ với $x \in \left[0; \dfrac{\pi}{2}\right]$.

n) $\cos^{13} x + \sin^{14} x = 1$.

o) $\cos 2x - \cos 6x + 4(\sin 2x + 1) = 0$.

p) $\sin x + \cos x = \sqrt{2}(2 - \cos 3x)$.

q) $\sin^3 x + \cos^3 x = 2 - \sin^4 x$.

r) $\cos^2 x - 4\cos x - 2x\sin x + x^2 + 3 = 0$.

s) $2^{|\sin x|} + |\sin x| = \sin^2 x + \cos x$.

t) $3\cot^2 x + 4\cos^2 x - 2\sqrt{3}\cot x - 4\cos x + 2 = 0$.

75 CÂU HỎI TRẮC NGHIỆM

Vấn đề 1. PHƯƠNG TRÌNH LƯỢNG GIÁC CƠ BẢN

1. Tập nghiệm của phương trình: $\cos^2 x = \dfrac{3}{4}$ là:

(A) $\{x \in \mathbb{R} / x = \pm\dfrac{\pi}{6} + k2\pi, k \in \mathbb{Z}\}$. (B) $\{x \in \mathbb{R} / x = \pm\dfrac{\pi}{6} + k\pi\}$.

(C) $\{x \in \mathbb{R} / x = \pm\dfrac{\pi}{6} + k\dfrac{\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}\}$. (D) $\{x \in \mathbb{R} / \pm\dfrac{5\pi}{6} + k2\pi, k \in \mathbb{Z}\}$.

2. Số nghiệm của phương trình: $\sin^2 x = \dfrac{1}{2}$ trên $[0; \pi]$ là:

(A) 0. (B) 1. (C) 2. (D) 3.

3. Số nghiệm của phương trình: $\sin\left(x + \dfrac{\pi}{4}\right) = 1$ trên $[\pi; 2\pi]$ là:

(A) 0. (B) 1. (C) 2. (D) 3.

4. Số nghiệm của phương trình: $\cos\left(2x + \dfrac{\pi}{4}\right) = -1$ trên $[0; \pi]$ là:

(A) 0. (B) 1. (C) 2. (D) 3.

5. Tổng các nghiệm của phương trình: $\cos\left(\dfrac{x}{2} + \dfrac{\pi}{4}\right) = 0$ trên $(0; 4\pi)$ là:

(A) $\dfrac{\pi}{2}$. (B) $\dfrac{5\pi}{2}$. (C) 3π. (D) $\dfrac{5\pi}{2}$.

6. Số nghiệm của phương trình: $\dfrac{\sin 3x}{\cos x + 1} = 0$ trên $[2\pi; 4\pi]$ là:

(A) 2. (B) 4. (C) 5. (D) 6.

7. Một nghiệm của phương trình: $\cos\left(\dfrac{x}{2} + 15^0\right) = \sin x$ là:

(A) 240^0. (B) 290^0. (C) 220^0. (D) 200^0.

8. Cho phương trình: $\tan\dfrac{\pi}{15}\cos x + \sin x = 1$ (*). Kết quả nào sao đây llà sai:

(A) $x = \dfrac{\pi}{2} + k2\pi$ là một họ nghiệm của (*).

(B) $x = \dfrac{11\pi}{30}$ là một nghiệm của (*).

(C) $x = \pi$ không là nghiệm của (*).

(D) $x = \frac{\pi}{13}$ là nghiệm của (*).

9. Số nghiệm của phương trình: $\cot(2x - 10^0) = \frac{1}{\sqrt{3}}$ trên $(90^0; 270^0)$ là:

(A) 0. (B) 1. (C) 4. (D) 5.

11. Khi giải phương trình: $\tan x = -\sqrt{3}$

Bạn An viết: $\tan x = -\sqrt{3} = \tan\left(-\frac{\pi}{3}\right) \Leftrightarrow x = -\frac{\pi}{3} + k\pi$.

Bạn Bình viết: $\tan x = -\sqrt{3} = \tan\left(\frac{2\pi}{3}\right) \Leftrightarrow x = \frac{2\pi}{3} + k\pi$. Thì:

(A) An đúng, Bình sai. (B) An sai, Bình đúng.

(C) An đúng, Bình đúng. (D) An sai, Bình sai.

12. Nghiệm nguyên dương bé nhất của phương trình

$\cos 3x + 4\cos 2x + 3\cos x - 4 = 0$ là:

(A) $\frac{\pi}{6}$. (B) $\frac{\pi}{4}$. (C) $\frac{\pi}{3}$. (D) $\frac{\pi}{2}$.

13. Số nghiệm trên $\left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$ của phương trình: $5\cos x - 2\cos 2x$ là:

(A) 0. (B) 1. (C) 2. (D) 3.

14. Số nghiệm trên $\left(0; \frac{\pi}{2}\right)$ của phương trình: $8\sin x\cos x\cos 2x = -1$ là:

(A) 0. (B) 1. (C) 2. (D) 4.

15. Nghiệm dương bé nhất của phương trình:

$\sin x + \sin 2x = \cos x + 2\cos^2 x$ là:

(A) $\frac{\pi}{6}$. (B) $\frac{\pi}{4}$. (C) $\frac{\pi}{3}$. (D) $\frac{2\pi}{3}$.

16. Một nghiệm của phương trình: $\sin^2 x + \sin^2 2x + \sin^2 3x = 2$ là:

(A) $\frac{\pi}{12}$. (B) $\frac{\pi}{8}$. (C) $\frac{\pi}{6}$. (D) $\frac{\pi}{3}$.

17. Nghiệm dương bé nhất của phương trình:

$1 + \sin x + \cos x + \sin x\cos x = \sin^2 x$ là:

(A) $\frac{\pi}{4}$. (B) $\frac{\pi}{2}$. (C) $\frac{3\pi}{4}$. (D) π.

18. Số nghiệm trên $[0; 2\pi]$ của phương trình: $\tan x = 3\cot x$ là:

(A) 1. (B) 2. (C) 3. (D) 4.

19. Nghiệm dương bé nhất của phương trình: $\cos 5x\cos x = \cos 4x$ là:

(A) $\frac{\pi}{5}$. (B) $\frac{2\pi}{5}$. (C) $\frac{\pi}{10}$. (D) $\frac{\pi}{6}$.

20. Nghiệm âm lớn nhất của phương trình: $2\sin 3x.\sin x = \cos 2x$ là:

(A) $-\frac{\pi}{2}$. (B) $-\frac{\pi}{3}$. (C) $-\frac{\pi}{6}$. (D) $-\frac{\pi}{8}$.

21. Tổng các nghiệm trên $\left(-\frac{\pi}{2}; \pi\right)$ của phương trình: $8\cos^4 x - \cos 4x = 1$ là:

(A) $\frac{\pi}{3}$. (B) $\frac{2\pi}{3}$. (C) $\frac{4\pi}{3}$. (D) $\frac{5\pi}{6}$.

22. Phương trình: $(m - 1)\cos x + 2 - m = 0$ có nghiệm khi và chỉ khi:

(A) $m > 1$. (B) $1 < m \le \frac{3}{2}$. (C) $m < 1$. (D) $m \ge \frac{3}{2}$.

Vấn đề 2. PHƯƠNG TRÌNH LƯỢNG GIÁC QUI VỀ BẬC HAI

23. Số nghiệm trên $(0; 2\pi)$ của phương trình: $-1 + 4\sin^2 x = 4\cos^4 x$ là:

(A) 0. (B) 1. (C) 2. (D) 4.

24. Tập hợp các nghiệm của phương trình: $\tan x + \cot x = 2$ là:

(A) $D = \{x \in \mathbb{R} / x = \frac{\pi}{4} + k2\pi, k \in \mathbb{Z}\}$.

(B) $D = \{x \in \mathbb{R} / x = \frac{\pi}{4} + k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$.

(C) $D = \{x \in \mathbb{R} / x = \pm\frac{\pi}{4} + k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$.

(D) $D = \{x \in \mathbb{R} / x = \frac{5\pi}{4} + k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$.

25. Nghiệm dương bé nhất của phương trình: $\cos 2x - 3\cos x = 4\cos^2\frac{x}{2}$ là:

(A) 30^0. (B) 60^0. (C) 120^0. (D) 150^0.

26. Cho phương trình: $\tan\left(x + \frac{\pi}{4}\right) + \tan x = 1$. Kết luận nào sau đây là sai:

(A) $x = k\pi$ là họ nghiệm của phương trình.

(B) $x = \arctan 3$ là một nghiệm của phương trình.

(C) $x = \arctan 3 + k\pi$ là họ nghiệm của phương trình.

(D) $x = \arctan 2$ là 1 nghiệm của phương trình.

27. Cho phương trình: $2\sin x\tan x + 4\cos x = 3$. Kết luận nào sau đây là đúng:

(A) Phương trình vô nghiệm.

(B) $x = \frac{\pi}{3}$ là nghiệm phương trình.

(C) $x = \arcsin\frac{1}{2}$ là nghiệm phương trình.

(D) $x = \frac{\pi}{2} + k\pi$ là nghiệm của phương trình.

28. Trên $[0; 2\pi]$ số nghiệm của phương trình: $\sin 2x + 2\tan x = 3$ là:

(A) 1. (B) 2. (C) 3. (D) 4.

29. Tập hợp các nghiệm của phương trình:

$(\cos x + 1)(\cos 2x + 2\cos x) = -2\sin^2 x$ là:

(A) $\{x \in \mathbb{R} / x = \pi + k2\pi, k \in \mathbb{Z}\}$. (B) $\{x \in \mathbb{R} / x = \pi + k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$.

(C) $\{x \in \mathbb{R} / x = k2\pi, k \in \mathbb{Z}\}$. (D) $\{x \in \mathbb{R} / x = k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$.

30. Tổng các nghiệm trên $(0; 2\pi)$ của phương trình $\cos 8x + \cos x4x = 2$ là:

(A) π. (B) 2π. (C) 3π. (D) 4π.

31. Nghiệm âm lớn nhất của phương trình:

$$\cot x - \tan x + 4\sin 2x - \frac{2}{\sin 2x} = 0 \text{ là:}$$

(A) $-\frac{4\pi}{3}$. (B) $-\frac{2\pi}{3}$. (C) $-\frac{\pi}{3}$. (D) $-\frac{\pi}{6}$.

32. Nghiệm âm lớn nhất của phương trình: $2\tan^2 x + 5\tan x + 3 = 0$ là:

(A) $-\frac{\pi}{3}$. (B) $-\frac{\pi}{4}$. (C) $-\frac{\pi}{6}$. (D) $-\frac{5\pi}{6}$.

33. Phương trình: $m\cos^2 x = \sin^2 x + m - 2$ có nghiệm khi và chỉ khi:

(A) $m \le 1$. (B) $m < 1$. C . $m \ge 1$. D $m > 1$.

Vấn đề 3. PHƯƠNG TRÌNH BẬC NHẤT THEO sinx, cosx

34. Giá trị của $X = \sqrt{3}\sin 15^0 + \cos 15^0 - \sqrt{2}$ bằng:

(A) $\sqrt{3}$. (B) $\sqrt{2}$. (C) 1. (D) 0.

35. Giá trị của $Y = \dfrac{1}{\sin\frac{\pi}{9}} - \dfrac{1}{\sqrt{3}\cos\frac{\pi}{9}}$ bằng:

(A) $\sqrt{3}$. (B) $\dfrac{2}{\sqrt{3}}$. (C) $\dfrac{4}{\sqrt{3}}$. (D) $-2\sqrt{3}$

36. Tập nghiệm của phương trình: $3\sin x + 2\cos x = 4$ là

(A) $\{x \in R/\ x = \frac{\pi}{4} + k\frac{\pi}{2},\ k \in Z\}$ (B) $\{x \in R/\ x = \frac{\pi}{6} + k\pi,\ k \in Z\}$

(C) $\varnothing$ (D) $\{x \in R/\ x = \pi \quad k3\pi,\ k \in Z\}$

37. Tập nghiệm của phương trình: $6\sin 2x - 3\cos 2x = 7$ là:

(A) $\{x/\ x = \frac{\pi}{6} + k\frac{\pi}{2}\}$ (B) $\{x/\ x = \frac{\pi}{6} + k\pi\}$

(C) $\{x/\ x = \frac{\pi}{4} + k2\pi\}$ (D) $\varnothing$

38. Số nghiệm trên $[0; 2\pi]$ của phương trình $\sin 2x + \cos 2x = -1$ là:

(A) 1. (B) 2. (C) 3. (D) 4.

39. Tổng các nghệm trên $[0; 2\pi]$ của phương trình $\sqrt{3}\sin x - \cos x = 1$ là:

(A) $\dfrac{4\pi}{3}$. (B) $\dfrac{2\pi}{3}$. (C) $\dfrac{\pi}{3}$. (D) 0.

40. Số nghiệm trên $(0, \pi)$ của phương trình:

$3\sin x - \sqrt{3}\cos 3x = 4\sin^3 x - 1$ là:

(A) 0. (B) 1. (C) 2. (D) 3.

41. Cho $y = \dfrac{\sin x + 2\cos x + 1}{\sin x + \cos x + 2}$ thì giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của y là

(A) –2 và 1 (B) 0 và 1 (C) –1 và 1 (D) –3 và 1

42. Nghiệm âm lớn nhất của phương trình:

$\sqrt{3}\sin 2x - \cos 2x = \sin x - \sqrt{3}\cos x$ là:

(A) $-\dfrac{\pi}{18}$. (B) $-\dfrac{\pi}{18}$. (C) $-\dfrac{\pi}{6}$. (D) $-\dfrac{\pi}{12}$.

43. Số nghiệm trên $\left(0; \dfrac{\pi}{2}\right)$ của phương trình:

$2\sin x(\cos x - 1) = \sqrt{3}\cos 2x$ là:

(A) 1. (B) 2. (C) 3. (D) 4.

44. Phương trình: $3\sin\alpha\sin x + 4\cos x = 5$ có nghiệm thực x khi và chỉ khi:

(A) $\alpha = \dfrac{\pi}{2} + k2\pi$. (B) $\alpha = \dfrac{\pi}{2} + k\pi$.

(C) $\alpha \in \mathbb{R}$. (D) $\alpha \in \varnothing$.

45. Phương trình: $2\sin x + \cos x = m(\sin x - 2\cos x + 3)$ có nghiệm khi và chỉ khi:

(A) $-\dfrac{1}{2} \le m \le 2$. (B) $-\dfrac{1}{2} < m < 2$.

(C) $m < -\dfrac{1}{2}$. (D) $m > 2$.

46. Phương trình: $\sin x + m\cos x = 1$ có nghiệm khi và chỉ khi:

(A) $m < -1$. (B) $m > 1$.

(C) $-1 \le m \le 1$. (D) $\forall m \in \mathbb{R}$.

Vấn đề 4. PHƯƠNG TRÌNH LƯỢNG GIÁC ĐỐI XỨNG

47. Đẳng thức nào sau đây là sai:

(A) $\sin x + \cos x = \sqrt{2}\sin\left(x + \dfrac{\pi}{4}\right)$. (B) $\sin x + \cos x = \sqrt{2}\cos\left(x - \dfrac{\pi}{4}\right)$.

(C) $\sin x - \cos x = \sqrt{2}\sin\left(x - \dfrac{\pi}{4}\right)$. (D) $\sin x - \cos x = \sqrt{2}\cos\left(x + \dfrac{\pi}{4}\right)$.

48. Cho phương trình:

$\sin x + \cos x + \sin x\cos x = 1$. Đặt $t = \cos x + \sin x$ thì t bằng:

(A) 1. (B) –1. (C) 3. (D) 4.

49. Họ nghiệm của phương trình:

$$\sqrt{2}(\sin x + \cos x) = \frac{1}{\sin x\cos x} \text{ là:}$$

(A) $x = \dfrac{\pi}{4} + k2\pi$. (B) $x = \dfrac{\pi}{4} + k\pi$

(C) $x = \dfrac{\pi}{4}$. (D) $x = \dfrac{\pi}{4} + \dfrac{k\pi}{2}$.

50. Cho phương trình: $\cos^3x - \sin^3x = 1$, thì $t = \cos x - \sin x$ bằng:

(A) -2. (B) 1. (C) 0. (D) 1 hay -2.

51. Nghiệm âm lớn nhất của phương trình:

$\sin x - \cos x = \sin x.\cos x - 1$ là:

(A) $-\frac{\pi}{2}$. (B) $-\frac{\pi}{3}$. (C) $-\frac{\pi}{4}$. (D) $-\frac{\pi}{6}$.

52. Giá trị nhỏ nhất của $Y = \tan x + \cot x$ là:

(A) 0. (B) 1.

(C) 2. (D) Không tồn tại.

53. Cho phương trình:

$3(\tan^2x + \cot^2x) + 4(\tan x + \cot x) + 2 = 0$, thì $t = \tan x + \cot x$ bằng:

(A) 0. (B) -2. (C) $\frac{2}{3}$. (D) -2 hay $\frac{2}{3}$.

54. Phương trình: $\sin x + \cos x = m$ có nghiệm khi và chỉ khi:

(A) $m \in [-\sqrt{2}; \sqrt{2}]$. (B) $m \in (-\sqrt{2}; \sqrt{2})$.

(C) $m \in [-2; 2]$. (D) $m \in [-1; 1]$.

Vấn đề 5. PHƯƠNG TRÌNH LƯỢNG GIÁC ĐẲNG CẤP

55. Cho phương trình: $3\cos^2x - 2\sin 2x + \sin^2x = 1$ (*). Kết luận nào sau đây là đúng:

(A) $x = \frac{\pi}{2} + k\pi$ không là nghiệm của (*).

(B) $x = \arctan\frac{1}{2}$ là nghiệm của (*).

(C) $x = 2\pi$ là nghiệm của (*).

(D) $x = -\pi$ là nghiệm của (*).

56. Cho phương trình: $\cos^2x + \sin 2x + 5\sin^2x = 2$ (1). Kết luận nào sau đây là sai:

(A) $x = \frac{\pi}{2}$ không là nghiệm của (1).

(B) $x = -\frac{\pi}{4}$ là nghiệm của (1).

(C) $x = \pi$ là nghiệm của (1).

(D) $x = \arctan\frac{1}{3}$ là nghiệm của (1).

57. Cho phương trình: $\sin^2 4x + \frac{3}{2}\sin 8x - 4\cos^2 4x = 0$ (1)

Kết luận nào sau đây là đúng:

(A) $x = 0$ là nghiệm của (1).

(B) $x = \frac{1}{4}\arctan 4$ là nghiệm của (1).

(C) $x = \frac{\pi}{2}$ là nghiệm của (1).

(D) $x = \frac{\pi}{4}$ là nghiệm của (1).

58. Số nghiệm trên $(0; 2\pi)$ của phương trình: $\sin 2x + 2\tan x = 3$ là:

(A) 0. (B) 1. (C) 2. (D) 3.

59. Cho phương trình: $\sin x\cos x - \sin^2 x = 1$ (*). Kết luận nào sau đây là đúng:

(A) $\frac{\pi}{2}$ là nghiệm của (*). (B) π là nghiệm của (*).

(C) $x = k2\pi$ là nghiệm của (*). (D) (*) vô nghiệm.

60. Số nghiệm trên $[0; 2\pi]$ của phương trình:

$$6\sin^2 x + 7\sqrt{3}\sin 2x - 8\cos^2 x = 6 \text{ là:}$$

(A) 1. (B) 2. (C) 3. (D) 4.

Vấn đề 6. CÁC PHƯƠNG TRÌNH LƯỢNG GIÁC DẠNG KHÁC

61. Tập hợp nghiệm của phương trình: $\sin x + \cos x = \sqrt{2\sin 2x}$ là:

(A) $\{x \in \mathbb{R} / x = \frac{\pi}{4} + k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$. (B) $\{x \in \mathbb{R} / x = \frac{\pi}{4} + k2\pi, k \in \mathbb{Z}\}$.

(C) $\{x \in \mathbb{R} / x = \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$. (D) $\{x \in \mathbb{R} / x = \frac{\pi}{2} + k2\pi, k \in \mathbb{Z}\}$.

62. Số nghiệm trên $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$ của phương trình: $\sqrt{\cos 2x} = 2 - \cos x$ là:

(A) 0. (B) 1. (C) 2. (D) 4.

63. Xét phương trình: $\sqrt{5\cos x - \cos 2x} + 2\sin x = 0$ (*). Kết luận nào sau đây là đúng:

(A) $x = \frac{\pi}{3}$ là nghiệm của (*). (B) $x = \frac{5\pi}{3}$ là nghiệm của (*).

(C) $x = -\frac{\pi}{3}$ là nghiệm của (*). (D) $x = -\frac{2\pi}{3}$ là nghiệm của (*).

64. Số nghiệm trên $(0; \pi)$ của phương trình $\sqrt{1 + \cos x} + \sqrt{1 - \cos x} = \sqrt{3}$ là:

(A) 0. (B) 1. (C) 2. (D) 4.

65. Số nghiệm của phương trình: $-\cos 2x = |\sin x| + |\cos x|$ trên $\left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$ là:

(A) 0. (B) 1. (C) 2. (D) 3.

66. Cho phương trình: $|\sin x + \cos x| = 1 - \sin x\cos x$ (*). Kết luận nào sau đây là sai:

(A) $x = 0$ là nghiệm của (*). (B) $x = \frac{\pi}{2}$ là nghiệm của (*).

(C) $x = k\frac{\pi}{2}$ là nghiệm của (*). (D) $x = \frac{\pi}{4}$ là nghiệm của (*).

67. Số nghiệm trên $[0; 2\pi]$ của phương trình: $3\cos x + 2|\sin x| = 2$ là:

(A) 0. (B) 1. (C) 2. (D) 3.

68. Số nghiệm trên $(0; 2\pi)$ của phương trình: $|\cos x| = 1 - \sqrt{3}\sin x$ là:

(A) 1. (B) 2. (C) 3. (D) 4.

69. Nghiệm dương bé nhất của phương trình: $\left(2\cos x - \sqrt{3}\right)^2 + \left(\sqrt{3}\mathrm{tg}x + 1\right)^2$ là:

(A) $\frac{\pi}{6}$. (B) $\frac{5\pi}{6}$. (C) $\frac{11\pi}{6}$. (D) $\frac{13\pi}{6}$.

70. Cho phương trình: $(2\cos 4x + 1)^2 + \sqrt{1 - \cos 3x} = 0$. Trên $(-\pi; \pi)$ số nghiệm của phương trình là:

(A) 1. (B) 2. (C) 3. (D) 4.

71. Số nghiệm trên $[0; 2\pi]$ của phương trình: $\cos 2x + \cos\frac{3x}{4} = 2$ là:

(A) 1. (B) 2. (C) 3. (D) 4.

72. Họ nghiệm của phương trình: cos6x.cos2x = 1 là: *(Với $k \in \mathbb{Z}$).*

(A) $x = 2k\pi$. (B) $x = k\pi$. (C) $x = \frac{k\pi}{2}$. (D) $x = \frac{k\pi}{4}$.

73. Phương trình: $\cos^2 2x = 1 + |\sin 2x|$ có họ các nghiệm là (với $k \in \mathbb{Z}$)

(A) $x = \frac{\pi}{2} + k\pi$ (B) $x = k\frac{\pi}{2}$

(C) $x = \frac{\pi}{2} + k2\pi$ (D) $x = k\frac{\pi}{4}$

74. Tập nghiệm của phương trình: $\cos x + 1 = -\sqrt{\cos x + 1}$

(A) $\{x \in R / x = \pi + k2\pi, k \in \mathbb{Z}\}$ (B) $\{x \in R / x = \pi + k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$

(C) $\{x \in R / x = k2\pi, k \in \mathbb{Z}\}$ (D) $\varnothing$

75. Tập nghiệm của phương trình: cos6x – cos4x = 2

(A) $\{x / x = k2\pi, k \in \mathbb{Z}\}$ (B) $\{x / x = \frac{\pi}{2} + k2\pi, k \in \mathbb{Z}\}$

(C) $\{x / x = k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$ (D) $\varnothing$

TRẢ LỜI

Vấn đề 1: PHƯƠNG TRÌNH LƯỢNG GIÁC CƠ BẢN

1. $$\cos^2 x = \frac{3}{4} \Leftrightarrow \frac{1 + \cos 2x}{2} = \frac{3}{4} \Leftrightarrow \cos 2x = \frac{1}{2}$$

$$\Leftrightarrow 2x = \pm\frac{\pi}{3} + k2\pi \Leftrightarrow x = \pm\frac{\pi}{6} + k\pi\ (k \in \mathbb{Z}) \rightarrow \text{Chọn (B)}$$

2. $$\sin^2 x = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \frac{1 - \cos 2x}{2} = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \cos 2x = 0 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{4} + \frac{k\pi}{2}$$

Do $x \in [0; \pi] \rightarrow k = 0, 1 \rightarrow$ Chọn (C)

3. $$\sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = 1 \Leftrightarrow x + \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{2} + k2\pi \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{4} + k2\pi$$

Do $x \in [\pi; 2\pi] \Rightarrow x \in \varnothing \rightarrow$ chọn (A)

4. $$\cos\left(2x + \frac{\pi}{4}\right) = -1 \Leftrightarrow 2x + \frac{\pi}{4} = \pi + k2\pi \Leftrightarrow x = \frac{3\pi}{8} + k\pi$$

Do $x \in [0; \pi] \Rightarrow x = \frac{3\pi}{8} \rightarrow$ Chọn (B)

5. $$\cos\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4}\right)=0 \Leftrightarrow \frac{x}{2}+\frac{\pi}{4}=\frac{\pi}{2}+k\pi$$

$$\Leftrightarrow \frac{x}{2}=\frac{\pi}{4}+k\pi \Leftrightarrow x=\frac{\pi}{2}+k2\pi$$

Do $x \in (0; 4\pi) \Rightarrow x \in \left\{\frac{\pi}{2}; \frac{5\pi}{2}\right\} \rightarrow S = 3\pi \rightarrow$ chọn (C)

6. $$\frac{\sin 3x}{\cos x+1}=0 \Leftrightarrow \begin{cases}\sin 3x = 0\\ \cos x \neq -1\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x=\frac{k\pi}{3}\\ x \neq \pi + l2\pi = (2l+1)\pi\end{cases}$$

Do $x \in [2\pi; 4\pi]$

$$\Rightarrow x \in \left\{2\pi; \frac{7\pi}{3}; \frac{8\pi}{3}; \frac{10\pi}{3}; \frac{11\pi}{3}; 4\pi\right\} \rightarrow \text{Chọn (D)}$$

7. $$\cos\left(\frac{x}{2}+15^0\right)=\sin x=\cos(90^0-x)$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\frac{x}{2}+15^0=90^0-x+k360^0\\ \frac{x}{2}+15^0=x-90^0+l360^0\end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\frac{3x}{2}=75^0+k360^0\\ +\frac{x}{2}=105^0-l360^0\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=50^0+k240^0\\ x=210^0-l720^0\end{array}\right.$$

Chọn B; $x = 290^0$.

Cách khác: Thay $x = 290^0$ vào phương trình, ta có:

$$\cos 160^0 = \sin 290^0 \Leftrightarrow -\cos 20^0 = -\sin 70^0$$

$$\Leftrightarrow \cos 20^0 = \sin 70^0 \text{ luôn đúng.}$$

8. $$\tan\frac{\pi}{15}\cos x + \sin x = 1$$

$$\Leftrightarrow \sin\frac{\pi}{15}\cos x + \sin x\cos\frac{\pi}{15} = \cos\frac{\pi}{15}$$

$$\Leftrightarrow \sin\left(x+\frac{\pi}{15}\right)=\sin\frac{13\pi}{30}$$

$$\Leftrightarrow x+\frac{\pi}{15}=\frac{13\pi}{30}+k2\pi \vee x+\frac{\pi}{15}=\frac{17\pi}{30}+k2\pi$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{11\pi}{30} + k2\pi \vee x = \frac{\pi}{2} + k2\pi.$$

Kết luận sai là (D)

Ghi chú: có thể thay x ở câu A, B, C vào đều đúng, vậy D sai.

9. $\cot(2x - 10^0) = \cot 60^0$

$\Leftrightarrow 2x - 10^0 = 60^0 + k180^0 \Leftrightarrow x = 35^0 + k90^0$

$x \in (90^0; 270^0) \Rightarrow x \in \{125^0; 215^0\}$ → Chọn (C)

10. $\cos 6x = \sin 2x \Leftrightarrow \cos 6x = \cos\left(\frac{\pi}{2} - 2x\right)$

$\Leftrightarrow 6x = \frac{\pi}{2} - 2x + k2\pi \vee 6x = 2x - \frac{\pi}{2} + k2\pi$

$\Leftrightarrow x = \frac{\pi}{16} + \frac{k\pi}{4} \vee x = -\frac{\pi}{8} + \frac{k\pi}{2}$

$x \in \left(0; \frac{\pi}{2}\right) \Rightarrow x \in \left\{\frac{\pi}{16}; \frac{5\pi}{16}; \frac{3\pi}{8}\right\}$ → Chọn (B)

11. An và Bình cùng đúng → Chọn (C)

12. $\cos 3x - 4\cos 2x + 3\cos x - 4 = 0$

$\Leftrightarrow (4\cos^3 x - 3\cos x) - 4(2\cos^2 x - 1) + 3\cos x - 4 = 0$

$\Leftrightarrow 4\cos^3 x - 8\cos^2 x = 0 \Leftrightarrow \cos^2 x = 0 \vee \cos x = 2$ (loại)

$\Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2} + k\pi$ → Chọn (D)

Ghi chú: Có thể thay các giá trị trên vào phương trình.

13. $5\cos x - 2\sin 2x = 0 \Leftrightarrow 5\cos x - 4\sin x\cos x = 0$

$\Leftrightarrow \cos x = 0 \vee \sin x = \frac{5}{4}$ (loại) $\Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2} + k\pi$ → Chọn (A)

14. $8\sin x.\cos x\cos 2x = -1 \Leftrightarrow 4\sin 2x.\cos 2x = -1$

$\Leftrightarrow \sin 4x = -\frac{1}{2} = \sin\left(-\frac{\pi}{6}\right) \Leftrightarrow x = -\frac{\pi}{24} + \frac{k\pi}{2} \vee x = \frac{7\pi}{24} + \frac{k\pi}{2}$

Do $x \in \left(0; \frac{\pi}{2}\right)$ nên có hai nghiệm → Chọn (C)

15. $\sin x + \sin 2x = \cos x + 2\cos^2 x$

$\Leftrightarrow \sin x(1 + 2\cos x) = \cos x(1 + 2\cos x)$

$\Leftrightarrow \sin x = \cos x \vee 1 + 2\cos x = 0$

$$\Leftrightarrow \tan x = 1 \vee \cos x = -\frac{1}{2} = \cos\left(\frac{2\pi}{3}\right)$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{\pi}{4} + k\pi \vee x = \pm\frac{2\pi}{3} + k2\pi$$

Nghiệm dương bé nhất $x = \frac{\pi}{4}$ → Chọn (B)

Chú ý: Có thể chọn số bé nhất trong (A), (B), (C), (D)

$$x = \frac{\pi}{6} \Rightarrow \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2} \neq \frac{\sqrt{3}}{2} + 2.\left(\frac{3}{4}\right)$$

$$x = \frac{\pi}{4} \Rightarrow \frac{\sqrt{2}}{2} + 1 = \frac{\sqrt{2}}{2} + 2\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2$$

Chọn (B)

16. $\sin^2 x + \sin^2 2x + \sin^2 3x = 2$

$$\Leftrightarrow \frac{1-\cos 2x}{2} + \frac{1-\cos 4x}{2} + \frac{1-\cos 6x}{2} = 2$$

$$\Leftrightarrow \cos 2x + 1 + \cos 4x + \cos 6x = 0 \Leftrightarrow 2\cos^2 x + 2\cos 5x\cos x = 0$$

$$\Leftrightarrow 2\cos x(\cos x + \cos 5x) = 0 \Leftrightarrow 4\cos x\cos 3x\cos 2x = 0$$

Dễ thấy $x = \frac{\pi}{6}$ là nghiệm → Chọn (C)

17*. $1 + \sin x + \cos x + \sin x\cos x = 1 - \cos^2 x$

$$\Leftrightarrow (\sin x + \cos x) + \cos x(\sin x + \cos x) = 0$$

$$\Leftrightarrow \sin x + \cos x = 0 \vee 1 + \cos x = 0$$

$$\Leftrightarrow \tan x = -1 \vee \cos x = -1 \Leftrightarrow x = -\frac{\pi}{4} + k\pi \vee x = \pi + k2\pi$$

→ Chọn $x = \frac{3\pi}{4}$ → Chọn (C)

Chú ý: Có thể làm giống câu 15.

18. $\tan x = 3\cot x$ (ĐK $\sin 2x \neq 0$)

$$\Leftrightarrow \tan^2 x = 3 \Leftrightarrow \tan x = \pm\sqrt{3} \Leftrightarrow x = \pm\frac{\pi}{3} + k\pi$$

Do $x \in [0; 2\pi] \Rightarrow x \in \left\{\frac{\pi}{3}; \frac{4\pi}{3}; \frac{2\pi}{3}; \frac{5\pi}{3}\right\}$ → Chọn (D)

19. $\cos5x\cos x = \cos4x \Leftrightarrow \frac{1}{2}(\cos4x + \cos6x) = \cos4x$

$\Leftrightarrow \cos6x + \cos4x = 0 \Leftrightarrow -2\sin5x\sin x = 0$

$\Leftrightarrow 5x = k\pi \vee x = k\pi \Leftrightarrow x = \frac{k\pi}{5} \vee x = k\pi$ → Chọn (A)

Chú ý: Có thể làm giống câu 15.

20. Cho $k' = -1 \Rightarrow x = -\frac{\pi}{8}$ là nghiệm âm bé nhất → Chọn (D)

21. $8\cos^4x - \cos4x = 1$

$\Leftrightarrow 8\left(\frac{1+\cos2x}{2}\right)^2 - (2\cos^2 2x - 1) = 1$

$\Leftrightarrow 2(1 + 2\cos2x + \cos^2 2x) - 2\cos^2 2x = 0$

$\Leftrightarrow \cos2x = -\frac{1}{2} \Leftrightarrow 2x = \pm\frac{2\pi}{3} + k2\pi$

$\Leftrightarrow x = \pm\frac{\pi}{3} + k\pi \Rightarrow x \in \left(-\frac{\pi}{2}; \pi\right) \Rightarrow x \in \left\{-\frac{\pi}{3}; \frac{\pi}{3}; \frac{2\pi}{3}\right\}$

$\Rightarrow S = \frac{2\pi}{3}$ → Chọn (B)

22. $(m - 1)\cos x = m - 2 \Leftrightarrow \cos x = \frac{m-2}{m-1}\ (m \neq 1)$

Phương trình có nghiệm $\Leftrightarrow -1 \leq \frac{m-2}{m-1} \leq 1$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \frac{m-2}{m-1} + 1 \geq 0 \\ \frac{m-2}{m-1} - 1 \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{2m-3}{m-1} \geq 0 \\ \frac{-1}{m-1} \leq 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} m < 1 \vee m \geq \frac{3}{2} \\ m > 1 \end{cases} \Leftrightarrow m \geq \frac{3}{2}$$ → Chọn (D)

Vấn đề 2: PHƯƠNG TRÌNH LƯỢNG GIÁC QUI VỀ BẬC HAI

23. $-1 + 4\sin^2x = 4\cos^4x$

$\Leftrightarrow -1 + 2(1 - \cos2x) = (1 + \cos2x)^2$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} t = \cos 2x \\ 1 - 2t = 1 + 2t + t^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t = \cos 2x \\ t^2 + 4t = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow 2x = \frac{\pi}{2} + k\pi \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{4} + k\frac{\pi}{2}$$

Do $x \in (0; 2\pi) \Rightarrow x \in \left\{\frac{\pi}{4}; \frac{3\pi}{4}; \frac{5\pi}{4}; \frac{7\pi}{4}\right\}$ → Chọn (D)

24. Đặt $t = \tan x \Rightarrow t + \frac{1}{t} = 2 \Rightarrow t^2 - 2t + 1 = 0$

$$\Rightarrow \tan x = 1 \Rightarrow x = \frac{\pi}{4} + k\pi \rightarrow \text{chọn (B)}$$

25. $\cos 2x - 3\cos x = 4\cos^2\frac{x}{2} \Leftrightarrow 2\cos^2 x - 1 - 3\cos x = 2(1 + \cos x)$

Đặt $t = \cos x \Rightarrow 5t^2 - 5t - 3 = 0 \Rightarrow t = -\frac{1}{2} \vee t = 3$ (loại)

Vậy $x = \pm 120^0 + k360^0$ → Chọn (C) sai

26. $\tan(x + \frac{\pi}{4}) + \tan x = 1 \Leftrightarrow \frac{\tan x + 1}{1 - \tan x} + \tan x = 1$

Đặt $t = \tan x \Rightarrow 1 + t + t(1 - t) = 1 - t \Rightarrow t^2 - 3t = 0$

$$\Rightarrow \tan x = 0 \vee \tan x = 3$$

A, B, C đều đúng → Chọn (D)

27. $2\sin x\tan x + 4\cos x = 3 \Leftrightarrow 2\sin x.\frac{\sin x}{\cos x} + 4\cos x = 3$

$\Leftrightarrow 2(1 - \cos^2 x) + 4\cos^2 x = 3\cos x$

$\Leftrightarrow 2\cos^2 x - 3\cos x + 2 = 0$ vô nghiệm. → Chọn (A)

28. $\sin 2x + 2\tan x = 3$, đặt $t = \tan x \Rightarrow \frac{2t}{1 + t^2} + 2t = 3$

$\Rightarrow 2t + 2t + 2t^3 = 3 + 3t^2 \Rightarrow 2t^3 - 3t^2 + 4t - 3 = 0$

$\Rightarrow \tan x = 1 \Rightarrow x = \frac{\pi}{4} + k\pi$ → Chọn (B) vì $x \in \left\{\frac{\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}\right\}$

29. $(\cos x + 1)(\cos 2x + 2\cos x) = -2\sin^2 x$

$\Leftrightarrow (\cos x + 1)(2\cos^2 x - 1 + 2\cos x) = -2(1 - \cos^2 x)$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \cos x + 1 = 0 \\ 2\cos^2 x + 2\cos x - 1 = -2(1 - \cos x) \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\cos x = -1\\ 2\cos^2 x = -1 \text{ (vn)}\end{array}\right. \Leftrightarrow x = \pi + k2\pi. \to \text{Chọn (A)}$$

30. $\cos 8x + \cos 4x = 2 \Leftrightarrow 2\cos^2 4x + \cos 4x - 3 = 0$

$$\Leftrightarrow \cos 4x = 1 \Leftrightarrow x = \frac{k\pi}{2}$$

Do $x \in (0; 2\pi) \Rightarrow x \in \left\{\frac{\pi}{2}; \pi; \frac{3\pi}{2}\right\} \Rightarrow S = 3\pi \to$ Chọn (C)

31. $\cot x - \tan x + 4\sin 2x - \dfrac{2}{\sin 2x} = 0$

Đặt $t = \tan x$ (ĐK $t \neq 0$)

$$\Rightarrow \frac{1}{t} - t + \frac{8t}{1+t^2} - \frac{1+t^2}{t} = 0 \Rightarrow \frac{8t}{1+t^2} = 2t$$

$$\Rightarrow \frac{4}{1+t^2} = 1 \text{ (do } t \neq 0) \Rightarrow \tan x = \pm\sqrt{3} \Rightarrow x = \pm\frac{\pi}{3} + k\pi$$

Nghiệm âm lớn nhất $-\dfrac{\pi}{3}$ → Chọn (C)

32. $2\tan^2 x + 5\tan x + 3 = 0 \Leftrightarrow \tan x = -1 \vee \tan x = -\dfrac{3}{2}$

$$\Leftrightarrow x = -\frac{\pi}{4} + k\pi \vee x = \arctan\left(-\frac{3}{2}\right) + k\pi$$

Do $y = \tan x$ là hàm tăng trên $\left(-\dfrac{\pi}{2}; \dfrac{\pi}{2}\right)$

$$-1 > -\frac{3}{2} \Rightarrow -\frac{\pi}{4} > \arctan\left(-\frac{3}{2}\right) \to \text{Chọn (B)}$$

Chú ý:

Chọn nghiệm âm lớn nhất $x = -\dfrac{\pi}{6}$ thay vào phương trình không thỏa

Chọn nghiệm âm kế tiếp $x = -\dfrac{\pi}{4}$ dễ dàng thấy đó là nghiệm

33. $m\cos^2 x = \sin^2 x + m - 2$

$$\Leftrightarrow m\cos^2 x = 1 - \cos^2 x + m - 2 \Leftrightarrow (m+1)\cos^2 x = m - 1$$

Phương trình có nghiệm $\Leftrightarrow 0 \le \dfrac{m-1}{m+1} \le 1$

$$\Leftrightarrow \begin{cases}\dfrac{m-1}{m+1} \ge 0\\ \dfrac{m-1}{m+1} - 1 \le 0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}m < -1 \vee m \ge 1\\ m > -1\end{cases} \Leftrightarrow m \ge 1 \to \text{Chọn (C)}$$

34.
$$\frac{X}{2} = \frac{\sqrt{3}}{2}\sin 15^0 + \frac{1}{2}\cos 15^0 - \frac{\sqrt{2}}{2}$$
$$\Leftrightarrow \frac{X}{2} = \cos(60^0 - 15^0) - \frac{\sqrt{2}}{2} = 0 \Leftrightarrow X = 0 \rightarrow \text{Chọn (D)}$$

35.
$$Y = \frac{1}{\sin\frac{\pi}{9}} - \frac{1}{\sqrt{3}\cos\frac{\pi}{9}} = \frac{\sqrt{3}\cos\frac{\pi}{9} - \sin\frac{\pi}{9}}{\sqrt{3}\sin\frac{\pi}{9}\cos\frac{\pi}{9}}$$
$$= \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}\cos\frac{\pi}{9} - \frac{1}{2}\sin\frac{\pi}{9}}{\frac{\sqrt{3}}{4}\sin\frac{2\pi}{9}} = \frac{\cos\left(\frac{\pi}{9} + \frac{\pi}{6}\right)}{\frac{\sqrt{3}}{4}\sin\frac{2\pi}{9}}$$
$$= \frac{4\cos\left(\frac{5\pi}{18}\right)}{\sqrt{3}\sin\frac{4\pi}{18}} = \frac{4}{\sqrt{3}} \rightarrow \text{Chọn (C)}$$

36. $a^2 + b^2 = 9 + 4 < c^2 = 16$. Phương trình vô nghiệm → Chọn (C)

37. $a^2 + b^2 = 36 + 9 < c^2 = 49$. Phương trình vô nghiệm → Chọn (D)

38.
$$\sin 2x + \cos 2x = -1$$
$$\Leftrightarrow \sqrt{2}\sin(2x + \frac{\pi}{4}) = -1$$
$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 2x + \frac{\pi}{4} = -\frac{\pi}{4} + k2\pi \\ 2x + \frac{\pi}{4} = \frac{5\pi}{4} + k'2\pi \end{array}\right.$$
$$\Leftrightarrow x = -\frac{\pi}{4} + k\pi \vee x = \frac{\pi}{2} + k\pi$$
$$x \in [0, 2\pi] \Rightarrow x \in \left\{\frac{3\pi}{4}, \frac{7\pi}{4}, \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right\} \rightarrow \text{Chọn (C)}$$

39. Xét phương trình $(\sin x + \cos x + 2)y = \sin x + 2\cos x + 1$

$\Leftrightarrow (y - 1)\sin x + (y - 2)\cos x + 2y - 1 = 0$ (*)

Phương trình có nghiệm $\Leftrightarrow (y - 1)^2 + (y - 2)^2 \geq (2y - 1)^2$

$\Leftrightarrow 2y^2 + 2y - 4 \leq 0$

$\Leftrightarrow -2 \leq y \leq 1$ → Chọn (A)

40. $3\sin x - \sqrt{3}\cos 3x = 4\sin^3 x - 1$

$\Leftrightarrow 3\sin x - 4\sin^3 x - \sqrt{3}\cos 3x = -1$

$\Leftrightarrow \frac{1}{2}\sin 3x - \frac{\sqrt{3}}{2}\cos 3x = -\frac{1}{2}$

$\Leftrightarrow \sin(3x - \frac{\pi}{6}) = \sin(-\frac{\pi}{6})$

$\Leftrightarrow 3x - \frac{\pi}{6} = -\frac{\pi}{6} + k2\pi \vee 3x - \frac{\pi}{6} = +\frac{7\pi}{6} + k'2\pi$

$\Leftrightarrow x = \frac{k2\pi}{3} \vee x = \frac{4\pi}{3} + k'2\pi$

Số nghiệm trên $(0, \pi)$ là 2 → Chọn (C)

41. $\sqrt{3}\sin x - \cos x = 1$

$\Leftrightarrow \frac{\sqrt{3}}{2}\sin x - \frac{1}{2}\cos x = \frac{1}{2}$

$\Leftrightarrow \sin(x - \frac{\pi}{6}) = \sin\frac{\pi}{6}$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x - \frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{6} + k2\pi \\ x - \frac{\pi}{6} = \frac{5\pi}{6} + k'2\pi \end{array}\right.$$

$\Leftrightarrow x = \frac{\pi}{3} + k2\pi \vee x = \pi + k'2\pi$

Vậy $S = \pi + \frac{\pi}{3} = \frac{4\pi}{3}$ → Chọn (A)

42. $\frac{\sqrt{3}}{2}\sin 2x - \cos 2x = \frac{1}{2}\sin x - \frac{\sqrt{3}}{2}\cos x$

$\Leftrightarrow \sin(2x - \frac{\pi}{6}) = \sin(x - \frac{\pi}{3})$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 2x - \frac{\pi}{6} = x - \frac{\pi}{3} + k2\pi \\ 2x - \frac{\pi}{6} = \pi - (x - \frac{\pi}{3}) + k'2\pi \end{array}\right.$$

$\Leftrightarrow x = -\frac{\pi}{6} + k2\pi \vee x = \frac{\pi}{2} + \frac{k'2\pi}{3}$

Nghiệm âm lớn nhất $-\frac{\pi}{6}$ → Chọn (C).

43. $2\sin x\cos x - 2\sin x = \sqrt{3}\cos 2x$

$\Leftrightarrow \frac{1}{2}\sin 2x - \frac{\sqrt{3}}{2}\cos 2x = \sin x$

$\Leftrightarrow \sin(2x - \frac{\pi}{3}) = \sin x$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 2x - \frac{\pi}{3} = x + k2\pi \\ 2x - \frac{\pi}{3} = \pi - x + k'2\pi \end{array}\right.$$

$\Leftrightarrow x = \frac{\pi}{3} + k2\pi \vee x = \frac{4\pi}{9} + k'2\pi$

Số nghiệm trên $(0, \frac{\pi}{2})$ là 2 → Chọn (B)

44. Phương trình: $3\sin\alpha\sin x + 4\cos x = 5$ có nghiệm

$\Leftrightarrow 9\sin^2\alpha + 16 \geq 25 \Leftrightarrow \sin^2\alpha \geq 1$

$\Leftrightarrow \sin^2\alpha = 1 \Leftrightarrow \cos\alpha = 0 \Leftrightarrow \alpha = \frac{\pi}{2} + k\pi$ → Chọn (B)

45. $2\sin x + \cos x + 1 = m(\sin x - 2\cos x + 3)$

$\Leftrightarrow (2 - m)\sin x + (1 + 2m)\cos x = 3m - 1$ (*)

(*) có nghiệm $\Leftrightarrow (2 - m)^2 + (1 + 2m)^2 \geq (3m - 1)^2$

$\Leftrightarrow 5m^2 + 5 \geq 9m^2 - 6m + 1$

$\Leftrightarrow 2m^2 - 3m - 2 \leq 0 \Leftrightarrow -\frac{1}{2} \leq m \leq 2$ → Chọn (A)

46. $\sin x + m\cos x = 1$ có nghiệm

$\Leftrightarrow 1 + m^2 \geq 1 \Leftrightarrow m^2 \geq 0 \Leftrightarrow \forall m \in \mathbb{R}$ → Chọn (D)

Vấn đề 4: PHƯƠNG TRÌNH LƯỢNG GIÁC ĐỐI XỨNG

47. (D) sai vì $\sin x - \cos x = -\sqrt{2}\cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$

48. $\sin x + \cos x + \sin x\cos x = -1$

Đặt $t = \sin x + \cos x \Rightarrow t^2 = 1 + 2\sin x\cos x$

Phương trình thành: $t + \frac{t^2 - 1}{2} = -1 \Leftrightarrow t^2 + 2t + 1 = 0 \Leftrightarrow t = -1$

→ Chọn (B)

49. $$\sqrt{2}(\sin x + \cos x) = \frac{1}{\sin x\cos x}$$

Đặt $t = \sin x + \cos x \Rightarrow t^2 = 1 + 2\sin x\cos x$

Phương trình thành: $\sqrt{2}t = \dfrac{2}{t^2 - 1} \Leftrightarrow t(t^2 - 1) = \sqrt{2}$

$$\Leftrightarrow t^3 - t - \sqrt{2} = 0 \Leftrightarrow t = \sqrt{2}$$

Vậy $\sin\left(x + \dfrac{\pi}{4}\right) = 1 \Leftrightarrow x = \dfrac{\pi}{4} + k2\pi$ → Chọn (A)

50. $$\cos^3 x - \sin^3 x = 1 \Leftrightarrow (\cos x - \sin x)(1 + \sin x\cos x) = 1$$

Đặt $t = \cos x - \sin x = \sqrt{2}\cos\left(x + \dfrac{\pi}{4}\right)$ (ĐK $|t| \le \sqrt{2}$)

$\Rightarrow$ Phương trình: $t\left(1 + \dfrac{1 - t^2}{2}\right) = 1 \Rightarrow t(3 - t^2) = 2$

$$\Rightarrow t^3 - 3t + 2 = 0$$

$$\Rightarrow t = 1 \vee t = -2 \text{ (loại)}$$

→ Chọn (B)

51. $$\sin x - \cos x = \sin x\cos x - 1$$

Đặt $t = \sin x - \cos x = \sqrt{2}\sin\left(x - \dfrac{\pi}{4}\right) \Rightarrow t^2 = 1 - 2\sin x\cos x$

Phương trình thành: $t = \dfrac{1 - t^2}{2} - 1 \Leftrightarrow t^2 + 2t + 1 = 0 \Leftrightarrow t = -1$

Vậy $\sin\left(x - \dfrac{\pi}{4}\right) = -\dfrac{1}{\sqrt{2}} = \sin\left(-\dfrac{\pi}{4}\right) \Leftrightarrow x = k2\pi \vee x = \dfrac{3\pi}{2} + k2\pi$

Nghiệm âm lớn nhất khi: $k' = -1 \Rightarrow x = -\dfrac{\pi}{2}$ → Chọn (C)

Ghi chú: Dĩ nhiên có thể thay các giá trị x vào phương trình.

52. $$y = \tan x + \cot x = \frac{\sin x}{\cos x} + \frac{\cos x}{\sin x} = \frac{2}{\sin 2x} \text{ (ĐK } \sin 2x \ne 0)$$

Do $|\sin 2x| \le 1 \Rightarrow |y| = \dfrac{2}{|\sin 2x|} \ge 2 \Rightarrow y \le -2 \vee y \ge 2$

Giá trị nhỏ nhất không tồn tại → Chọn (D)

53. $$t = \tan x + \cot x = \frac{2}{\sin 2x} \quad (|t| \ge 2)$$

$$\Rightarrow 3(t^2 - 2) + 4t + 2 = 0 \Rightarrow t = -2 \vee t = \frac{2}{3} \text{ (loại)} \rightarrow \text{Chọn (B)}$$

54. $\sin x + \cos x = m \Leftrightarrow \sqrt{2}\sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = m$

Phương trình có nghiệm $\Leftrightarrow -1 \le \frac{m}{\sqrt{2}} \le 1$

$\Leftrightarrow -\sqrt{2} \le m \le \sqrt{2} \to$ Chọn (A)

Vấn đề 5: PHƯƠNG TRÌNH LƯỢNG GIÁC ĐẲNG CẤP

55. $3\cos^2 x - 4\sin x\cos x + \sin^2 x = 1$

$\Leftrightarrow 2\cos^2 x - 4\sin x\cos x = 0 \Leftrightarrow 2\cos x(\cos x - 2\sin x) = 0$

$\Leftrightarrow \cos x = 0 \vee \tan x = \frac{1}{2} \to$ Kết quả (B) đúng.

56. $\cos^2 x + \sin 2x + 5\sin^2 x = 2$

Khi: $\cos x = 0 \Rightarrow \sin x = \pm 1$ phương trình không thỏa → (A) đúng.

Chia 2 vế phương trình cho $\cos^2 x$, Đặt $t = \tan x$ thì:

$1 + 2\tan x + 5\tan^2 x = 2(1 + \tan^2 x)$

$\Leftrightarrow 3\tan^2 x + 2\tan x - 1 = 0$

$\Leftrightarrow \tan x = -1 \vee \tan x = \frac{1}{3} \to$ Kết luận C là sai.

Ghi chú: có thể thay $x = \pi$ vào phương trình thấy không thỏa.

57. $\sin^2 4x + 3\sin 4x\cos 4x - 4\cos^2 4x = 0$

Khi $\cos 4x = 0$ thì $\sin 4x = \pm 1$ ta có phương trình: $1 = 0$ (vô nghiệm)

Chia 2 vế phương trình cho $\cos^2 4x$, Đặt $t = \tan 4x$

$\Rightarrow t^2 - 3t - 4 = 0 \Rightarrow t = -1 \vee t = 4$

$\Rightarrow 4x = -\frac{\pi}{4} + k\pi \vee 4x = \arctan 4 + k'\pi$

$\Rightarrow x = -\frac{\pi}{16} + \frac{k\pi}{4} \vee x = \frac{1}{4}\arctan 4 + \frac{k'\pi}{4} \to$ Chọn (B)

58. $\sin 2x + 2\tan x = 3$ $(\cos x \neq 0)$

$\Leftrightarrow \frac{2\sin x\cos x}{\cos^2 x} + \frac{2\tan x}{\cos^2 x} = \frac{3}{\cos^2 x}$

Đặt $t = \tan x \Rightarrow 2t + 2t(1 + t^2) = 3(1 + t^2) \Rightarrow 2t^3 - 3t^2 + 4t - 3 = 0$

$\Rightarrow t = 1 \Rightarrow x = \frac{\pi}{4} + k\pi$

Do $x \in (0, 2\pi) \Rightarrow x \in \left\{\frac{\pi}{4}; \frac{5\pi}{4}\right\}$ → Chọn (C)

59. $$1 = \sin x\cos x - \sin^2 x \ (*)$$

$\Leftrightarrow \dfrac{1}{\cos^2 x} = \dfrac{\sin x}{\cos x} - \dfrac{\sin^2 x}{\cos^2 x}$ (Do $\cos x = 0$ không là nghiệm)

Đặt $t = \tan x$ ta có phương trình: $1 + t^2 = t - t^2$

$\Leftrightarrow 2t^2 - t + 1 = 0$ Vô nghiệm → Chọn (D)

Cách khác:

- Thay $x = \dfrac{\pi}{2}$ vào (*), ta có $1 = -1$ → (A) sai.
- Thay $x = \pi$ vào (*), ta có $1 = 0$ → (B) sai.
- Thay $x = k2\pi$ vào (*), ta có $1 = 0$ → (C) sai.

Vậy chọn (D)

60. $$14\sqrt{3}\sin x\cos x - 8\cos^2 x = 6(1 - \sin^2 x)$$

$\Leftrightarrow \sqrt{3}\sin x\cos x - \cos^2 x = 0 \Leftrightarrow \cos x(\sqrt{3}\sin x - \cos x) = 0$

$\Leftrightarrow \cos x = 0 \vee \tan x = \dfrac{1}{\sqrt{3}} \Leftrightarrow x = \dfrac{\pi}{2} + k\pi \vee x = \dfrac{\pi}{6} + k\pi$

Do $x \in [0; 2\pi] \Rightarrow x \in \left\{\frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{2}; \frac{\pi}{6}; \frac{7\pi}{6}\right\}$ → Chọn (D)

Vấn đề 6: CÁC PHƯƠNG TRÌNH LƯỢNG GIÁC DẠNG KHÁC

61. $$\sin x + \cos x = \sqrt{2\sin 2x}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \sin x + \cos x \ge 0 \\ 1 + \sin 2x = 2\sin 2x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sin\left(x + \dfrac{\pi}{4}\right) \ge 0 \\ 2x = \dfrac{\pi}{2} + k2\pi \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \sin\left(x + \dfrac{\pi}{4}\right) \ge 0 \\ x = \dfrac{\pi}{4} + k\pi \end{cases} \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{4} + m2\pi. \to \text{Chọn (B)}$$

62. $$\sqrt{\cos 2x} = 2 - \cos x$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2 - \cos x \geq 0 \text{ luôn đúng} \\ 2\cos^2 x - 1 = 4 - 4\cos x + \cos^2 x \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \cos^2 x + 4\cos x - 5 = 0$$

$$\Leftrightarrow \cos x = 1 \vee \cos x = -5 \text{ (loại)} \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2} + k2\pi$$

Do $x \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right] \Rightarrow x = \frac{\pi}{2}$ → Chọn (B)

63. (*) $\Leftrightarrow \sqrt{5\cos x - \cos 2x} = -2\sin x$

Điều kiện là $\sin x \leq 0$

Loại bỏ A, (B)

Thay $x = -\frac{\pi}{3}$ vào (*): $\sqrt{\frac{5}{2} + \frac{1}{2}} = -2\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ thỏa. Vậy chọn (C)

64. $\sqrt{1 + \cos x} + \sqrt{1 + \cos x} = \sqrt{3}$

$$\Leftrightarrow 2 + 2\sqrt{1 - \cos^2 x} = 3 \Leftrightarrow 2|\sin x| = 1$$

$$\Leftrightarrow \sin x = \pm\frac{1}{2} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \frac{\pi}{6} + k2\pi \\ x = \frac{5\pi}{6} + k2\pi \\ x = -\frac{\pi}{6} + k2\pi \\ x = \frac{7\pi}{6} + k2\pi \end{array}\right. \rightarrow \text{Chọn (C)}$$

65. $|\sin x| + |\cos x| = -\cos 2x$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \cos 2x \leq 0 \\ 1 + |\sin 2x| = 1 - \sin^2 2x \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \cos 2x \leq 0 \\ \sin 2x = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \cos 2x \leq 0 \\ \cos 2x = \pm 1 \end{cases} \Leftrightarrow \cos 2x = -1$$

$$\Leftrightarrow 2x = \pi + k2\pi \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2} + k\pi$$

Phương trình không có nghiệm trên $\left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$ → Chọn (A)

66. Dễ dàng thay giá trị $x = k\frac{\pi}{2}$ vào (*) thỏa.

Vậy (A), (B), (C) đúng.

Chọn (D) sai.

67. $3\cos x + 2|\sin x| = 2 \Leftrightarrow 2|\sin x| = 2 - 3\cos x$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -1 \le \cos x \le \dfrac{2}{3} \\ 4(1-\cos^2 x) = 4 - 12\cos x + 9\cos^2 x \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -1 \le \cos x \le \dfrac{2}{3} \\ 13\cos^2 x - 12\cos x = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \cos x = 0 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2} + k\pi$$

Do $x \in [0; 2\pi] \Rightarrow x \in \left\{\dfrac{\pi}{2}; \dfrac{3\pi}{2}\right\}$ → Chọn (C)

68. $|\cos x| = 1 - \sqrt{3}\sin x$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -1 \le \sin x \le \dfrac{1}{\sqrt{3}} \\ 1 - \sin^2 x = 1 - 2\sqrt{3}\sin x + 3\sin^2 x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -1 \le \sin x \le \dfrac{1}{\sqrt{3}} \\ 4\sin^2 x - 2\sqrt{3}\sin x = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -1 \le \sin x \le \dfrac{1}{\sqrt{3}} \\ \sin x = 0 \vee \sin x = \dfrac{\sqrt{3}}{2} \text{ (loại)} \end{cases} \Leftrightarrow \sin x = 0 \Leftrightarrow x = k\pi$$

Do $x \in (0; 2\pi) \Rightarrow x = \pi$ → Chọn (A)

69. $\left(2\cos x \quad \sqrt{3}\right)^2 + \left(\sqrt{3}\tan x + 1\right)^2 = 0$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \cos x = \dfrac{\sqrt{3}}{2} \\ \tan x = -\dfrac{\sqrt{3}}{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \pm\dfrac{\pi}{6} + k2\pi \\ x = -\dfrac{\pi}{6} + k'\pi \end{cases} \Leftrightarrow x = -\frac{\pi}{6} + k2\pi$$

Nghiệm dương bé nhất là $x = \dfrac{11\pi}{6}$ → Chọn (C)

70. $(2\cos 4x + 1)^2 + \sqrt{1 - \cos 3x} = 0$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \cos 4x = -\dfrac{1}{2} \\ \cos 3x = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \cos\dfrac{8k\pi}{3} = -\dfrac{1}{2} \\ x = \dfrac{k2\pi}{3} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \cos\dfrac{2k\pi}{3} = -\dfrac{1}{2} \\ x = \dfrac{2\pi k}{3} \end{cases} \text{ Nhận với } k = 1, 2 \ldots$$

Trên $(-\pi; \pi)$ có hai nghiệm $x = \pm\dfrac{2\pi}{3}$ → Chọn (B)

71. $$\cos 2x + \cos\frac{3}{4}x = 2 \Leftrightarrow \begin{cases}\cos 2x = 1\\ \cos\frac{3}{4}x = 1\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x = k\pi\\ \cos\frac{3k\pi}{4} = 1\end{cases}$$

Trên $[0; 2\pi]$ chỉ chọn $k = 0 \Rightarrow x = \pi \to$ Chọn (A)

72. $$\cos 6x.\cos 2x = 1$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases}\cos 6x = 1\\ \cos 2x = 1\end{cases} \vee \begin{cases}\cos 6x = -1\\ \cos 2x = -1\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases}4\cos^3 2x - 3\cos 2x = 1\\ \cos 2x = 1\end{cases} \vee \begin{cases}4\cos^3 2x - 3\cos 2x = -1\\ \cos 2x = -1\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \cos 2x = \pm 1 \Leftrightarrow \sin 2x = 0 \Leftrightarrow x = \frac{k\pi}{2} \to \text{Chọn (C)}$$

73. $$\cos^2 2x = 1 + |\sin 2x|$$

$$\Leftrightarrow -\sin^2 2x = |\sin 2x|$$

$$\Leftrightarrow \sin 2x = 0$$

$$\Leftrightarrow 2x = k\pi$$

$$\Leftrightarrow x = k\frac{\pi}{2} \to \text{Chọn (B)}$$

74. $$\cos x \geq -1 \Rightarrow \cos x + 1 \geq 0$$

$$-\sqrt{1 + \cos x} \leq 0$$

Vậy phương trình $\Leftrightarrow \cos x + 1 = 0$

$\Leftrightarrow \cos x = -1$

$\Leftrightarrow x = \pi + k2\pi \to$ Chọn (A)

75. $$\cos 6x - \cos 4x = 2$$

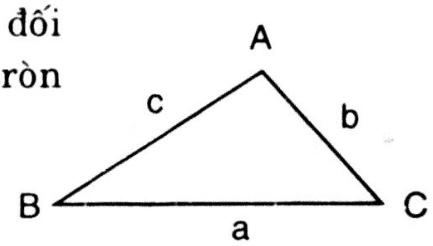
$$\Leftrightarrow \begin{cases}\cos 6x = 1\\ \cos 4x = -1\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}t = \cos 2x\\ 4t^3 - 3t = 1\\ 2t^2 - 1 = -1\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases}t = \cos 2x\\ 4t^3 - 3t = 1\\ t = 0\end{cases} \Leftrightarrow t \in \varnothing \to \text{Chọn (D)}$$

Chương 3. HỆ THỨC LƯỢNG TRONG TAM GIÁC

I. Định lý hàm sin và cosin

Cho ΔABC có a, b, c lần lượt là ba cạnh đối diện của góc A, B, C. R bán kính đường tròn ngoại tiếp ΔABC. S là diện tích ΔABC thì



$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = 2R$$

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos A = b^2 + c^2 - 4S.\cot A$$

$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac\cos B = a^2 + c^2 - 4S.\cot B$$

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos C = a^2 + b^2 - 4S.\cot C$$

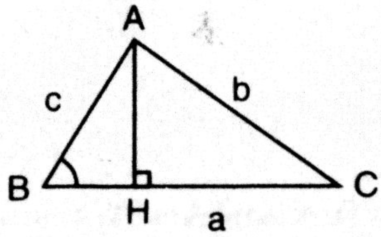
Bài 1. Cho ΔABC có $a = \sqrt{6}$, $b = 2$, $c =(1 + \sqrt{3})$. Tính góc $\widehat{B}$, độ dài đường cao AH và bán kính đường tròn qua A, B, C.

Giải

Do định lý hàm cosin: $b^2 = a^2 + c^2 - 2ac\cos B$

$$\Rightarrow \cos B = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac} = \frac{6 + (4 + 2\sqrt{3}) - 4}{2(\sqrt{6})(1 + \sqrt{3})} = \frac{2(3 + \sqrt{3})}{2\sqrt{6}.(1 + \sqrt{3})} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\Rightarrow B = \frac{\pi}{4}$$



ΔABH vuông $\Rightarrow \sin\frac{\pi}{4} = \frac{AH}{AB}$

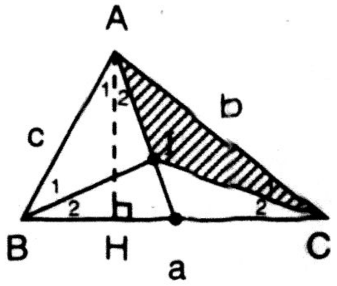
$$\Rightarrow AH = (1 + \sqrt{3}).\frac{\sqrt{2}}{2}$$

Do định lý hàm sin: $\frac{b}{\sin B} = 2R \;\Rightarrow\; R = \dfrac{2}{2.\frac{\sqrt{2}}{2}} = \sqrt{2}$. ■

Bài 2. Cho ΔABC có $\widehat{B} = 60^0$, bán kính đường tròn ngoại tiếp ΔABC là $R = 2$. Gọi I là tâm đường tròn nội tiếp ΔABC. Tính bán kính đường tròn ngoại tiếp ΔACI.

Giải

Do định lí hàm sin: $\dfrac{b}{\sin B} = 2R \Rightarrow AC = 4\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right) = 2\sqrt{3}$



ΔABC có $\widehat{B} = 60^0 \Rightarrow \widehat{A} + \widehat{C} = 120^0$

$\Rightarrow \widehat{A}_2 + \widehat{C}_2 = 60^0$

$\Rightarrow \widehat{AIC} = 120^0$.

Áp dụng định lí hàm sin cho ΔIAC

Ta có: $\dfrac{AC}{\sin\widehat{AIC}} = 2R' \Rightarrow R' = \dfrac{AC}{2\sin 120^0} = \dfrac{2\sqrt{3}}{2.\dfrac{\sqrt{3}}{2}} = 2.$ ■

Bài 3. Cho ΔABC. Chứng minh: $\dfrac{\sin(A - B)}{\sin C} = \dfrac{a^2 - b^2}{c^2}$

Giải

Ta có $\dfrac{a^2 - b^2}{c^2} = \dfrac{4R^2\sin^2 A - 4R^2\sin^2 B}{4R^2\sin^2 C}$

$$= \frac{\sin^2 A - \sin^2 B}{\sin^2 C} = \frac{\frac{1}{2}(1 - \cos 2A) - \frac{1}{2}(1 - \cos 2B)}{\sin^2 C}$$

$$= \frac{\cos 2B - \cos 2A}{2\sin^2 C} = \frac{-2\sin(A + B)\sin(B - A)}{2\sin^2 C}$$

$$= \frac{\sin(A + B).\sin(A - B)}{\sin^2 C} = \frac{\sin(A - B)}{\sin C}$$

$\left(\text{do } \sin(A + B) = \sin C > 0\right)$. ■

Bài 4. Cho ΔABC, biết rằng $\tan\dfrac{A}{2} \cdot \tan\dfrac{B}{2} = \dfrac{1}{3}$.

Chứng minh $a + b = 2c$

Giải

Ta có: $\tan\dfrac{A}{2} \cdot \tan\dfrac{B}{2} = \dfrac{1}{3} \Leftrightarrow 3\sin\dfrac{A}{2}\sin\dfrac{B}{2} = \cos\dfrac{A}{2}\cos\dfrac{B}{2}$

$\left(\text{do } \cos\dfrac{A}{2} > 0, \cos\dfrac{B}{2} > 0\right)$

$$\Leftrightarrow 2\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2} = \cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2} - \sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}$$

$$\Leftrightarrow -\left[\cos\frac{A+B}{2} - \cos\frac{A-B}{2}\right] = \cos\frac{A+B}{2}$$

$$\Leftrightarrow \cos\frac{A-B}{2} = 2\cos\frac{A+B}{2} \ (*)$$

Mặt khác: $a + b = 2R(\sin A + \sin B)$

$$= 4R\sin\frac{A+B}{2}\cos\frac{A-B}{2}$$

$$= 8R\sin\frac{A+B}{2}\cos\frac{A+B}{2} \ \left(\text{do } (*)\right)$$

$$= 4R\sin(A+B)$$

$$= 4R\sin C = 2c \, .$$

Cách khác: $a + b = 2c$

$$\Leftrightarrow 2R(\sin A + \sin B) = 4R\sin C$$

$$\Leftrightarrow 2\sin\frac{A+B}{2}\cos\frac{A-B}{2} = 4\sin\frac{C}{2}\cos\frac{C}{2}$$

$$\Leftrightarrow \cos\frac{A-B}{2} = 2\sin\frac{C}{2} = 2\cos\frac{A+B}{2} \ \left(\text{do } \sin\frac{A+B}{2} = \cos\frac{C}{2}\right)$$

$$\Leftrightarrow \cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2} + \sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2} = 2\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2} - 2\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}$$

$$\Leftrightarrow 3\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2} = \cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}$$

$$\Leftrightarrow \tan\frac{A}{2}\cdot\tan\frac{B}{2} = \frac{1}{3}. \blacksquare$$

Bài 5. Cho ΔABC, chứng minh nếu $\cot A, \cot B, \cot C$ tạo thành một cấp số cộng thì a^2, b^2, c^2 cũng là cấp số cộng.

Giải

Ta có:

$\cot A, \cot B, \cot C$ là cấp số cộng $\Leftrightarrow \cot A + \cot C = 2\cot B \quad (*)$

Cách 1:

Ta có: $(*) \Leftrightarrow \dfrac{\sin(A+C)}{\sin A\sin C} = \dfrac{2\cos B}{\sin B} \Leftrightarrow \sin^2 B = 2\sin A\sin C\cos B$

$$\Leftrightarrow \sin^2 B = -[\cos(A+C) - \cos(A-C)][-\cos(A+C)]$$

$$\Leftrightarrow \sin^2 B = \cos^2(A+C) - \cos(A-C)\cos(A+C)$$

$$\Leftrightarrow \sin^2 B = \cos^2 B - \frac{1}{2}[\cos 2A + \cos 2C]$$

$$\Leftrightarrow \sin^2 B = (1-\sin^2 B) - \frac{1}{2}[(1-2\sin^2 A) + (1-2\sin^2 C)]$$

$$\Leftrightarrow 2\sin^2 B = \sin^2 A + \sin^2 C$$

$$\Leftrightarrow \frac{2b^2}{4R^2} = \frac{a^2}{4R^2} + \frac{c^2}{4R^2}$$

$$\Leftrightarrow 2b^2 = a^2 + c^2$$

$\Leftrightarrow a^2, b^2, c^2$ là cấp số cộng.

Cách 2:

Ta có: $a^2 = b^2 + c^2 - 2abc\cos A$

$$\Leftrightarrow a^2 = b^2 + c^2 - 4\left(\frac{1}{2}bc\sin A\right).\cot A$$

$$\Leftrightarrow a^2 = b^2 + c^2 - 4S\cot A$$

Do đó: $\cot A = \dfrac{b^2 + c^2 - a^2}{4S}$

Tương tự: $\cot B = \dfrac{a^2 + c^2 - b^2}{4S}, \cot C = \dfrac{a^2 + b^2 - c^2}{4S}$

Vậy: $(*) \Leftrightarrow \dfrac{b^2 + c^2 - a^2}{4S} + \dfrac{a^2 + b^2 - c^2}{4S} = 2 \cdot \dfrac{a^2 + c^2 - b^2}{4S}$

$$\Leftrightarrow 2b^2 = a^2 + c^2. \blacksquare$$

Bài 6. Cho ΔABC có $\sin^2 B + \sin^2 C = 2\sin^2 A$

Chứng minh $\widehat{BAC} \le 60^0$.

Giải

Ta có: $\sin^2 B + \sin^2 C = 2\sin^2 A$

$$\Leftrightarrow \frac{b^2}{4R^2} + \frac{c^2}{4R^2} = \frac{2a^2}{4R^2} \Leftrightarrow b^2 + c^2 = 2a^2\ (*)$$

Do định lý hàm cosin ta có:

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos A \Rightarrow b^2 + c^2 = a^2 + 2bc\cos A$$

Do đó: $(*) \Leftrightarrow a^2 + 2bc\cos A = 2a^2$

$$\Leftrightarrow \cos A = \frac{a^2}{2bc} = \frac{b^2+c^2}{4bc} \ge \frac{1}{2} \text{ (do Cauchy)}$$

$$\Leftrightarrow \widehat{BAC} \le 60^0. \blacksquare$$

Bài 7. Cho ΔABC. Chứng minh:

$$\cot A + \cot B + \cot C = \frac{R\left(a^2+b^2+c^2\right)}{abc}$$

Giải

Ta có: $\cot A = \dfrac{b^2+c^2-a^2}{4S}$ (Chứng minh trong bài 6)

Tương tự: $\cot B = \dfrac{a^2+c^2-b^2}{4S}$, $\cot C = \dfrac{a^2+b^2-c^2}{4S}$

Do đó: $\cot A + \cot B + \cot C = \dfrac{a^2+b^2+c^2}{4S} = \dfrac{a^2+b^2+c^2}{4\dfrac{abc}{4R}}$

$$= R\,\frac{a^2+b^2+c^2}{abc}. \blacksquare$$

Bài 8. Cho ΔABC có 3 góc A, B, C tạo thành một cấp số nhân có công bội $q = 2$. Giả sử $A < B < C$.

Chứng minh: $\dfrac{1}{a} = \dfrac{1}{b} + \dfrac{1}{c}$

Giải

Do A, B, C là cấp số nhân có $q = 2$ nên $B = 2A$, $C = 2B = 4A$

Mà $A + B + C = \pi$ nên $A = \dfrac{\pi}{7}, B = \dfrac{2\pi}{7}, C = \dfrac{4\pi}{7}$.

Cách 1:

Ta có: $\dfrac{1}{b} + \dfrac{1}{c} = \dfrac{1}{2R\sin B} + \dfrac{1}{2R\sin C}$

$$= \frac{1}{2R}\left(\frac{1}{\sin\frac{2\pi}{7}} + \frac{1}{\sin\frac{4\pi}{7}}\right) = \frac{1}{2R}\,\frac{\sin\frac{4\pi}{7} + \sin\frac{2\pi}{7}}{\sin\frac{2\pi}{7}.\sin\frac{4\pi}{7}}$$

$$= \frac{1}{2R}\cdot\frac{2\sin\frac{3\pi}{7}.\cos\frac{\pi}{7}}{\sin\frac{2\pi}{7}.\sin\frac{3\pi}{7}}\left(\text{do} \sin\frac{4\pi}{7} = \sin\frac{3\pi}{7}\right)$$

$$= \frac{1}{R}\cdot\frac{\cos\frac{\pi}{7}}{2\sin\frac{\pi}{7}.\cos\frac{\pi}{7}} = \frac{1}{2R\sin A} = \frac{1}{a}.$$

Cách 2: Ta có:

$$\frac{1}{a} = \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \Leftrightarrow \frac{1}{\sin A} = \frac{1}{\sin B} + \frac{1}{\sin C}$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{\sin A} = \frac{1}{\sin 2A} + \frac{1}{\sin 4A} = \frac{\sin 4A + \sin 2A}{\sin 2A \sin 4A}$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{\sin A} = \frac{2\sin 3A.\cos A}{\sin 2A \sin 4A} = \frac{2\cos A}{\sin 2A} = \frac{2\cos A}{2\sin A\cos A}$$

do: $\sin 3A = \sin\frac{3\pi}{7} = \sin\frac{4\pi}{7} = \sin 4A$. ■

Bài 9. Tính các góc của ΔABC nếu: $\frac{\sin A}{1} = \frac{\sin B}{\sqrt{3}} = \frac{\sin C}{2}$

Giải

Do định lý hàm sin: $\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = 2R$

nên: $\frac{\sin A}{1} = \frac{\sin B}{\sqrt{3}} = \frac{\sin C}{2}$ (*)

$$\Leftrightarrow \frac{a}{2R} = \frac{b}{2R\sqrt{3}} = \frac{c}{4R} \Leftrightarrow a = \frac{b}{\sqrt{3}} = \frac{c}{2} \Leftrightarrow \begin{cases} b = a\sqrt{3} \\ c = 2a \end{cases}$$

Ta có: $c^2 = 4a^2 = \left(a\sqrt{3}\right)^2 + a^2 \Leftrightarrow c^2 = b^2 + a^2$

Vậy ΔABC vuông tại C

Thay $\sin C = 1$ vào (*) ta được: $\frac{\sin A}{1} = \frac{\sin B}{\sqrt{3}} = \frac{1}{2}$

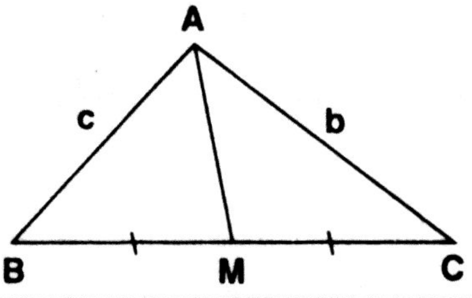
$$\Leftrightarrow \begin{cases} \sin A = \frac{1}{2} \\ \sin B = \frac{\sqrt{3}}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A = 30^\circ \\ B = 60^\circ \end{cases}$$ ■

Ghi chú:

Trong tam giác ABC ta có

$a = b \Leftrightarrow A = B \Leftrightarrow \sin A = \sin B \Leftrightarrow \cos A = \cos B$.

II. Định lý về đường trung tuyến



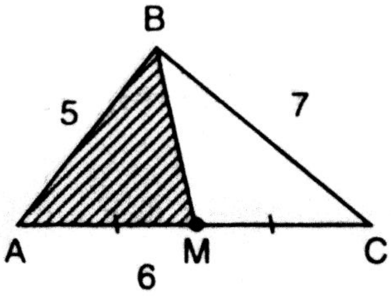
Cho ΔABC có trung tuyến AM thì:

$$AB^2 + AC^2 = 2AM^2 + \frac{BC^2}{2}$$

hay: $$c^2 + b^2 = 2m_a^2 + \frac{a^2}{2}$$

Bài 10. Cho ΔABC có AB = 5cm, AC = 6cm, BC = 7cm. Gọi M là trung điểm AC. Tính bán kính đường tròn ngoại tiếp ΔABM.

Giải



Ta có: $BA^2 + BC^2 = 2BM^2 + \frac{AC^2}{2}$

$$\Leftrightarrow MB^2 = \frac{1}{2}(BA^2 + BC^2 - \frac{AC^2}{2})$$

$$= \frac{1}{2}(25 + 49 - 18) = 28$$

$$\Leftrightarrow MB = 2\sqrt{7}.$$

Mặt khác từ ΔABC: $\cos A = \frac{AB^2 + AC^2 - BC^2}{2AB.AC} = \frac{25 + 36 - 49}{2(30)} = \frac{1}{5}$

$$\Rightarrow \sin A = \sqrt{1 - \frac{1}{25}} = \frac{2\sqrt{6}}{5}.$$

Áp dụng định lí hàm sin trên ΔABM ta có:

$$\frac{BM}{\sin A} = 2R \Rightarrow R = \frac{2\sqrt{7}}{\frac{4\sqrt{6}}{5}} = \frac{5\sqrt{7}}{2\sqrt{6}} = \frac{5\sqrt{42}}{12}. \blacksquare$$

Bài 11. Cho ΔABC có BC = a, AC = b và đường trung tuyến AM = AB = c. Chứng minh: $\sin^2 A = 2(\sin^2 B - \sin^2 C)$.

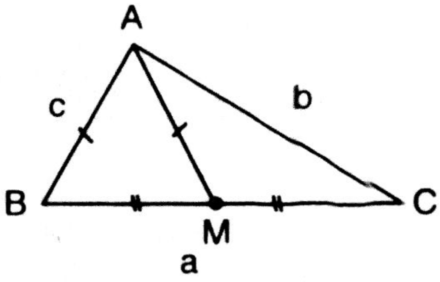
Giải

Do định lí về đường trung tuyến:

$$AB^2 + AC^2 = 2AM^2 + \frac{BC^2}{2}$$

$$\Rightarrow c^2 + b^2 = 2c^2 + \frac{a^2}{2} \Rightarrow a^2 = 2(b^2 - c^2) \qquad (*)$$

Do định lí hàm số sin ta có: $\dfrac{a}{\sin A} = \dfrac{b}{\sin B} = \dfrac{c}{\sin C}$



$$\Rightarrow \frac{a^2}{\sin^2 A} = \frac{b^2 - c^2}{\sin^2 B - \sin^2 C}$$

Từ (*) $\Rightarrow \dfrac{2(b^2 - c^2)}{\sin^2 A} = \dfrac{b^2 - c^2}{\sin^2 B - \sin^2 C}$

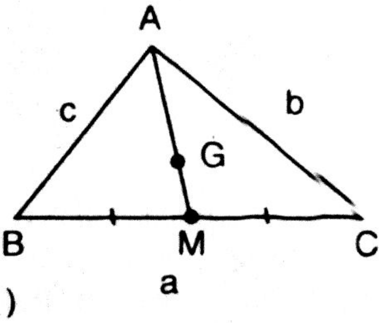
$$\Rightarrow 2(\sin^2 B - \sin^2 C) = \sin^2 A. \blacksquare$$

Bài 12. Cho ΔABC có trọng tâm G. Chứng minh

$$GA^2 + GB^2 + GC^2 = \frac{1}{3}(AB^2 + AC^2 + BC^2).$$

Giải

Do tính chất trọng tâm G ta có: $GA = \dfrac{2}{3}AM \Rightarrow GA^2 = \dfrac{4}{9}AM^2$



Ta có: $AB^2 + AC^2 = 2AM^2 + \dfrac{BC^2}{2}$

$$\Rightarrow AM^2 = \frac{1}{2}\left(AB^2 + AC^2 - \frac{BC^2}{2}\right)$$

$$\Rightarrow GA^2 = \frac{2}{9}\left(AB^2 + AC^2 - \frac{BC^2}{2}\right) \qquad (1)$$

Tương tự: $GB^2 = \dfrac{2}{9}\left(BA^2 + BC^2 - \dfrac{AC^2}{2}\right) \qquad (2)$

$$GC^2 = \frac{2}{9}\left(CA^2 + CB^2 - \frac{AB^2}{2}\right) \qquad (3)$$

Lấy (1) + (2) + (3) $\Rightarrow GA^2 + GB^2 + GC^2 = \dfrac{2}{9} \times \dfrac{3}{2}(AB^2 + BC^2 + AC^2). \blacksquare$

Bài 13. Cho ΔABC có trung tuyến phát xuất từ B và C là m_b, m_c thỏa $\dfrac{c}{b} = \dfrac{m_b}{m_c} \neq 1$. Chứng minh: $2\cot A = \cot B + \cot C$

Giải

Ta có: $\dfrac{c^2}{b^2} = \dfrac{m_b^2}{m_c^2} \Leftrightarrow \dfrac{c^2}{b^2} = \dfrac{\dfrac{1}{2}\left(a^2 + c^2 - \dfrac{b^2}{2}\right)}{\dfrac{1}{2}\left(b^2 + a^2 - \dfrac{c^2}{2}\right)}$

$$\Leftrightarrow b^2c^2 + a^2c^2 - \frac{c^4}{2} = a^2b^2 + b^2c^2 - \frac{b^4}{2}$$

$$\Leftrightarrow a^2c^2 - a^2b^2 = \frac{1}{2}\left(c^4 - b^4\right)$$

$$\Leftrightarrow a^2\left(c^2 - b^2\right) = \frac{1}{2}\left(c^2 - b^2\right)\left(c^2 + b^2\right)$$

$$\Leftrightarrow 2a^2 = c^2 + b^2 \ (1) \left(\text{do } \frac{c}{b} \neq 1\right)$$

Thay $b^2 + c^2 = a^2 + 2bc\cos A$ vào (1), ta có (1) thành

$$a^2 = 2bc\cos A$$

$$\Leftrightarrow \cos A = \frac{a^2}{2bc} = \frac{4R^2\sin^2 A}{2(2R\sin B)(2R\sin C)}$$

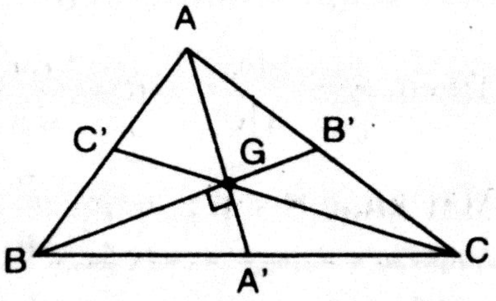
$$\Leftrightarrow 2\frac{\cos A}{\sin A} = \frac{\sin A}{\sin B\sin C} = \frac{\sin(B + C)}{\sin B\sin C}$$

$$\Leftrightarrow 2\cot A = \frac{\sin B\cos C + \sin C\cos B}{\sin B\sin C} = \cot C + \cot B. \ \blacksquare$$

Bài 14. Chứng minh nếu ΔABC có trung tuyến AA' vuông góc với trung tuyến BB' thì $\cot C = 2(\cot A + \cot B)$

Giải

ΔGAB vuông tại G có GC' trung tuyến nên $AB = 2GC'$



Vậy $AB = \frac{2}{3}CC' \Leftrightarrow 9c^2 = 4m_c^2$

$$\Leftrightarrow 9c^2 = 2\left(b^2 + a^2 - \frac{c^2}{2}\right)$$

$$\Leftrightarrow 5c^2 = a^2 + b^2$$

$$\Leftrightarrow 5c^2 = c^2 + 2ab\cos C \text{ (do định lý hàm cos)}$$

$$\Leftrightarrow 2c^2 = ab\cos C$$

$$\Leftrightarrow 2(2R\sin C)^2 = (2R\sin A)(2R\sin B)\cos C$$

$$\Leftrightarrow 2\sin^2 C = \sin A\sin B\cos C \Leftrightarrow \frac{2\sin C}{\sin A\sin B} = \frac{\cos C}{\sin C}$$

$$\Leftrightarrow \frac{2\sin(A + B)}{\sin A\sin B} = \cot C \Leftrightarrow \frac{2(\sin A\cos B + \sin B\cos A)}{\sin A\sin B} = \cot C$$

$$\Leftrightarrow 2(\cot B + \cot A) = \cot C. \ \blacksquare$$

III. Diện tích tam giác

Gọi S: diện tích ΔABC

R: bán kính đường tròn ngoại tiếp ΔABC

r: bán kính đường tròn nội tiếp ΔABC

p: nửa chu vi của ΔABC

thì: $$S = \frac{1}{2}a.h_a = \frac{1}{2}b.h_b = \frac{1}{2}c.h_c$$

$$S = \frac{1}{2}ab\sin C = \frac{1}{2}ac\sin B = \frac{1}{2}bc\sin A$$

$$S = \frac{abc}{4R}$$

$$S = pr$$

$$S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$$

Bài 15. Cho ΔABC có a = 21cm, b = 17cm, c = 10cm. Tính diện tích ΔABC. Suy ra bán kính đường tròn ngoại tiếp và nội tiếp ΔABC.

Giải

Ta có: $p = \frac{1}{2}(a + b + c) = \frac{1}{2}(21 + 17 + 10) = 24$

$\Rightarrow S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)} = \sqrt{24(24-21)(24-17)(24-10)} = 84$

Ta có: $S = \frac{abc}{4R} \Rightarrow R = \frac{abc}{4S} = \frac{21 \times 17 \times 10}{4(84)} = \frac{85}{8}$

Mặt khác $S = p.r \Rightarrow r = \frac{S}{p} = \frac{84}{24} = \frac{7}{2}$.■

Bài 16. Cho ΔABC chứng minh: $\sin 2A + \sin 2B + \sin 2C = \frac{2S}{R^2}$

Giải

Ta có: $\sin 2A + (\sin 2B + \sin 2C)$

$= \sin 2A + 2\sin(B + C).\cos(B - C)$

$= 2\sin A\cos A + 2\sin A\cos(B - C)$

$= 2\sin A[\cos A + \cos(B - C)]$

$= 2\sin A[-\cos(B + C) + \cos(B - C)]$

$$= 2\sin A.[2\sin B.\sin C]$$

$$= 4.\frac{a}{2R}.\frac{b}{2R}.\frac{c}{2R} = \frac{1}{2}\frac{abc}{R^3} = \frac{1}{2}\frac{4RS}{R^3} = \frac{2S}{R^2}. \blacksquare$$

Bài 17. Cho ΔABC. Chứng minh:

$$S = \text{Diện tích}(\Delta ABC) = \frac{1}{4}\left(a^2\sin 2B + b^2\sin 2A\right)$$

Giải

Ta có: $S = dt(\Delta ABC) = \frac{1}{2}ab\sin C$

$$= \frac{1}{2}ab\sin(A + B)$$

$$= \frac{1}{2}ab\left[\sin A\cos B + \sin B\cos A\right]$$

$$= \frac{1}{2}ab\left[\left(\frac{a}{b}\sin B\right)\cos B + \left(\frac{b}{a}\sin A\right)\cos A\right] \text{(do đl hàm sin)}$$

$$= \frac{1}{2}\left[a^2\sin B\cos B + b^2\sin A\cos A\right]$$

$$= \frac{1}{4}\left(a^2\sin 2B + b^2\sin 2A\right). \blacksquare$$

Bài 18. Gọi I là tâm đường tròn nội tiếp ΔABC. Chứng minh:

a) $r = 4R\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}$ b) $IA.IB.IC = 4Rr^2$

Giải

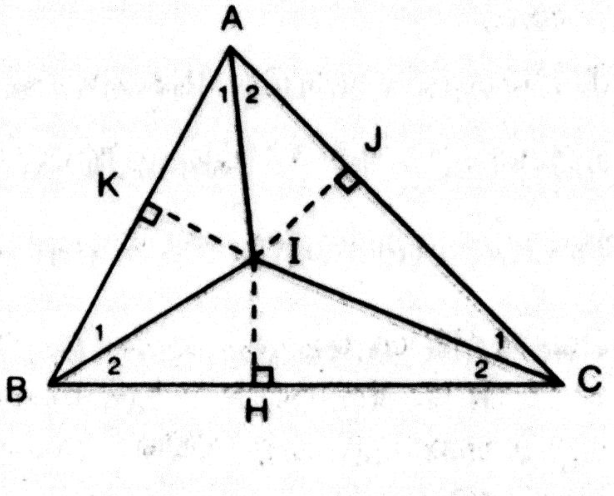
a) Ta có: $\Delta IBH \perp \Rightarrow \cot\frac{B}{2} = \frac{BH}{IH} \Rightarrow BH = r\cot\frac{B}{2}$

Tương tự $HC = r\cot\frac{C}{2}$

Mà: $BH + CH = BC$

Nên: $r\left(\cot\frac{B}{2} + \cot\frac{C}{2}\right) = a$

$$\Leftrightarrow \frac{r\sin\left(\dfrac{B+C}{2}\right)}{\sin\dfrac{B}{2}\sin\dfrac{C}{2}} = a$$



$$\Leftrightarrow r\cos\frac{A}{2} = (2R\sin A)\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}$$

$$\Leftrightarrow r\cos\frac{A}{2} = 4R\sin\frac{A}{2}\cos\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}$$

$$\Leftrightarrow r = 4R\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}.\ \left(\text{do } \cos\frac{A}{2} > 0\right)$$

b) Ta có: $\Delta \perp AKI \Rightarrow \sin\frac{A}{2} = \frac{IK}{IA} \Rightarrow IA = \frac{r}{\sin\frac{A}{2}}$

Tương tự $IB = \frac{r}{\sin\frac{B}{2}}$; $IC = \frac{r}{\sin\frac{C}{2}}$

Do đó: $IA.IB.IC = \frac{r^3}{\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}} = \frac{r^3}{\frac{r}{4R}} = 4Rr^2$. ■

BÀI TẬP TỰ GIẢI

1. Cho ΔBC có ba cạnh là a, b, c. R và r lần lượt là bán kính đường tròn ngoại tiếp và nội tiếp ΔABC. Chứng minh:

a) $(a-b)\cot\frac{C}{2} + (b-c)\cot\frac{A}{2} + (c-a)\cot\frac{B}{2} = 0$

b) $1 + \frac{r}{R} = \cos A + \cos B + \cos C$

c) Nếu $\cot\frac{A}{2}, \cot\frac{B}{2}, \cot\frac{C}{2}$ là cấp số cộng thì a, b, c cũng là cấp số cộng.

d) Diện tích $\Delta ABC = Rr(\sin A + \sin B + \sin C)$

e) Nếu: $a^4 = b^4 + c^4$ thì ΔABC có 3 góc nhọn và $2\sin^2 A = \tan B.\tan C$.

2. Nếu diện tích $(\Delta ABC) = (c + a - b)(c + b - a)$ thì $\tan C = \frac{8}{15}$.

3. Cho ΔABC có ba góc nhọn. Gọi A', B', C' là chân các đường cao vẽ từ A, B, C. Gọi S, R, r lần lượt là diện tích, bán kính đường tròn ngoại tiếp, nội tiếp ΔABC. Gọi S', R', r' lần lượt là diện tích, bán kính đường tròn ngoại tiếp, nội tiếp của $\Delta A'B'C'$. Chứng minh:

a) $S' = 2S\cos A.\cos B.\cos C$

b) $R' = \dfrac{R}{2}$

c) $r' = 2R\cos A.\cos B.\cos C$.

4. ΔABC có ba cạnh a, b, c tạo một cấp số cộng. Với $a < b < c$

Chứng minh:

a) $ac = 6Rr$

b) $\cos\dfrac{A-C}{2} = 2\sin\dfrac{B}{2}$

c) Công sai $d = \dfrac{3r}{2}\left(\tan\dfrac{C}{2} - \tan\dfrac{A}{2}\right)$.

5. Cho ΔABC có ba góc A, B, C theo thứ tự tạo 1 cấp số nhân có công bội $q = 2$. Chứng minh:

a) $\dfrac{1}{a} = \dfrac{1}{b} + \dfrac{1}{c}$

b) $\cos^2 A + \cos^2 B + \cos^2 C = \dfrac{5}{4}$.

20 CÂU HỎI TRẮC NGHIỆM

Cho ΔABC có $\widehat{BAC} = 60^0$, AC = 8, AB = 5.

Hãy trả lời các câu 1, 2, 3, 4, 5, 6.

1. Độ dài BC bằng:

(A) 6 (B) 7 (C) 8 (D) 9.

2. Diện tích ΔABC bằng:

(A) 10 (B) $10\sqrt{3}$ (C) $5\sqrt{3}$ (D) $2\sqrt{3}$.

3. Độ dài đường cao phát xuất từ A:

(A) $\dfrac{20\sqrt{3}}{7}$ (B) $\dfrac{10\sqrt{3}}{7}$ (C) $\dfrac{5\sqrt{3}}{7}$ (D) $\dfrac{\sqrt{3}}{7}$.

4. Bán kính đường tròn ngoại tiếp ΔABC bằng:

(A) $\dfrac{7}{3}$ (B) $\dfrac{7}{3}\sqrt{3}$ (C) $\dfrac{5}{3}\sqrt{3}$ (D) $\sqrt{3}$.

5. Bán kính đường tròn nội tiếp ΔABC bằng:

(A) $\dfrac{\sqrt{3}}{7}$ (B) $\dfrac{2}{7}$ (C) $2\sqrt{3}$ (D) $\dfrac{2\sqrt{3}}{7}$.

6. Độ dài trung tuyến phát xuất từ A bằng:

(A) $\frac{1}{2}$ (B) $\sqrt{129}$ (C) $\frac{\sqrt{129}}{2}$ (D) $\frac{\sqrt{129}}{4}$.

7. Cho ΔABC có $a = 3$, $b = 4$, $c = 6$. Cosin góc lớn nhất của ΔABC bằng

(A) $-\frac{11}{24}$ (B) $\frac{11}{24}$ (C) $\frac{43}{48}$ (D) $\frac{29}{36}$.

8. ΔABC vuông tại A có AB = 6, BC = 10.

Bán kính đường tròn nội tiếp ΔABC bằng

(A) 1 (B) $\sqrt{2}$ (C) 2 (D) 3.

9. Tam giác đều nội tiếp đường tròn có $R = 4$ thì diện tích tam giác bằng

(A) 13 (B) $13\sqrt{2}$ (C) $12\sqrt{3}$ (D) 15.

10. Tam giác đều cạnh a nội tiếp trên đường tròn bán kính R thì bán kính R bằng:

(A) $\frac{a\sqrt{3}}{2}$ (B) $\frac{a\sqrt{2}}{3}$ (C) $\frac{a\sqrt{3}}{3}$ (D) $\frac{a\sqrt{3}}{4}$.

11. Bán kính đường tròn nội tiếp tam giác đều cạnh a bằng:

(A) $\frac{a\sqrt{3}}{4}$ (B) $\frac{a\sqrt{2}}{5}$ (C) $\frac{a\sqrt{3}}{6}$ (D) $\frac{a\sqrt{5}}{7}$.

12. ΔABC vuông cân tại A có AB = AC = a thì đường trung tuyến BM có độ dài:

(A) $\frac{3}{2}a$ (B) $a\sqrt{2}$ (C) $a\sqrt{3}$ (D) $\frac{a\sqrt{5}}{2}$.

13. ΔABC vuông cân tại A có AB = a thì đường tròn nội tiếp ΔABC có bán kính r bằng

(A) $\frac{a}{2}$ (B) $\frac{a}{\sqrt{2}}$ (C) $\frac{a}{2+\sqrt{2}}$ (D) $\frac{a}{3}$.

14. Diện tích hình bình hành ABCD có AB = a, BC = $a\sqrt{2}$, $\widehat{BAD} = \frac{\pi}{4}$:

(A) $2a^2$ (B) $a^2\sqrt{2}$ (C) a^2 (D) $a^2\sqrt{3}$.

15. Cho ΔABC có $\hat{B} = 60^0$ và AC = $2\sqrt{3}$. Gọi I là tâm đường tròn nội tiếp ΔABC thì bán kính đường tròn ngoại tiếp ΔAIC:

(A) 2 (B) 4 (C) 6 (D) 8.

16. ΔABC vuông cân tại A nội tiếp đường tròn bán kính R, và ngoại tiếp đường tròn bán kính r thì tỉ số $\frac{R}{r}$ bằng

(A) $1+\sqrt{2}$ (B) $1+\frac{\sqrt{2}}{2}$ (C) $\frac{\sqrt{2}-1}{2}$ (D) $\frac{1+\sqrt{2}}{2}$.

17. ΔABC vuông cân tại A có AB = AC = a. Hai đường trung tuyến BF và CE cắt nhau tại G thì diện tích ΔGFC bằng:

(A) $\frac{a^2}{24}$ (B) $\frac{a^2}{12}$ (C) $\frac{a^2}{6}$ (D) $\frac{a^2}{3}$.

18. Cho $\widehat{xOy} = 30^0$. Gọi A, B di động trên Ox, Oy sao cho AB = 1. Độ dài lớn nhất của OB bằng

(A) $\frac{3}{2}$ (B) 2 (C) $\sqrt{3}$ (D) $2\sqrt{2}$.

19. ΔABC có AB = c, AC = b, BC = a. Mệnh đề nào sau đây là sai:

(A) Nếu $b^2 + c^2 > a^2$ thì $\hat{A}$ nhọn

(B) Nếu $a^2 > b^2 + c^2$ thì góc A tù

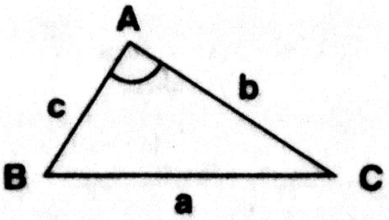
(C) Nếu $b^2 + c^2 = a^2$ thì góc A vuông

(D) Nếu $c^2 > a^2 + b^2$ thì góc A tù.

20. Cho tam giác ABC có diện tích S. Nếu tăng cạnh BC lên 2 lần, tăng cạnh AC lên 3 lần thì diện tích tam giác mới bằng:

(A) 2S (B) 3S (C) 4S (D) 6S.

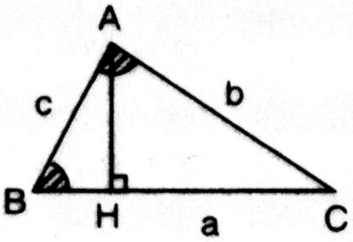
TRẢ LỜI



$\hat{A} = \frac{\pi}{3}$, AC = b = 8, AB = c = 5.

Trả lời câu 1 → 6

1. $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos A = 64 + 25 - 2(8)(5)\frac{1}{2} = 49 \Rightarrow a = 7 \rightarrow$ Chọn (B)



2. $S = \frac{1}{2}bc\sin A = \frac{1}{2}(8)(5)\frac{\sqrt{3}}{2} = 10\sqrt{3}$

→ Chọn (B)

3. $S = \frac{1}{2}ah_a \Rightarrow h_a = \frac{2S}{a} = \frac{20\sqrt{3}}{7} \rightarrow$ Chọn (A)

4. $S = \dfrac{abc}{4R} \Rightarrow R = \dfrac{abc}{4S} = \dfrac{8\times5\times7}{40\sqrt{3}} = \dfrac{7}{\sqrt{3}}$ → Chọn (B)

5. $p = \dfrac{1}{2}(8 + 5 + 7) = 10.$

$$S = p.r \Rightarrow r = \frac{S}{p} = \frac{\frac{20\sqrt{3}}{7}}{10} = \frac{2\sqrt{3}}{7} \rightarrow \text{Chọn (D)}$$

6. $b^2 + c^2 = 2m_a^2 + \dfrac{a^2}{2} \Rightarrow 2m_a^2 = 64 + 25 - \dfrac{49}{2} = \dfrac{129}{2}$

$$\Rightarrow m_a^2 = \frac{129}{4} \Rightarrow m_a = \frac{\sqrt{129}}{2} \rightarrow \text{Chọn (C)}$$

7. Ứng với cạnh dài nhất là góc lớn nhất C.

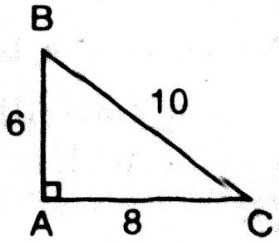
$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos C$$

$$\Rightarrow \cos C = \frac{b^2 + a^2 - c^2}{2ab} = \frac{9 + 16 - 36}{2(3)(4)} = -\frac{11}{24} \rightarrow \text{Chọn (A)}$$

8. $\Delta ABC \perp \Rightarrow AC^2 = 100 - 36 = 8^2$

$$S = \frac{1}{2}AB.AC = \frac{1}{2}(6)(8) = 24$$

$$S = pr \Rightarrow r = \frac{24}{\frac{1}{2}(6 + 8 + 10)} = 2.$$

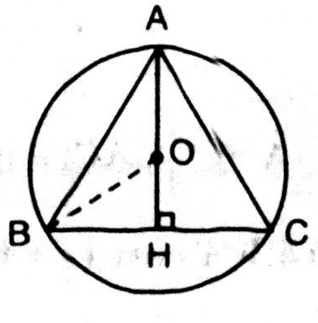


Chọn (C)

9. Ta có sđ $\overset{\frown}{AB} = 120^0 \Rightarrow AB = R\sqrt{3}$.

$$Dt(\Delta ABC) = \frac{1}{2}a^2\sin 60^0 = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}$$

$$= \frac{(R\sqrt{3})^2\sqrt{3}}{4} = \frac{3\sqrt{3}}{4}R^2 = 12\sqrt{3}.$$



Chọn (C)

10. $R = AO = \dfrac{2}{3}AH = \dfrac{2}{3}.\dfrac{a\sqrt{3}}{2} = \dfrac{a\sqrt{3}}{3}$ → Chọn (C)

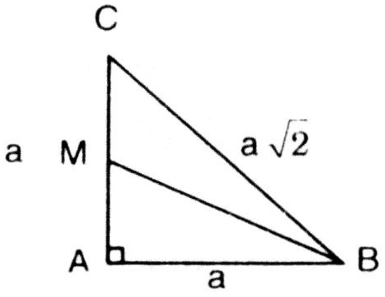
11. $S = pr \Rightarrow \dfrac{a^2\sqrt{3}}{4} = \dfrac{3a}{2}r \Rightarrow r = \dfrac{a^2\sqrt{3}}{4} \times \dfrac{2}{3a} = \dfrac{a}{2\sqrt{3}} = \dfrac{a\sqrt{3}}{6}.$

Chọn (C)

12. $BC^2 + AB^2 = 2BM^2 + \frac{AC^2}{2}$

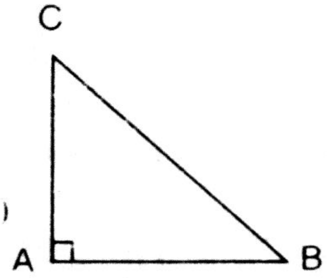
$\Rightarrow 2BM^2 = 3a^2 - \frac{a^2}{2} = \frac{5a^2}{2}$

$\Rightarrow BM = \frac{a\sqrt{5}}{2}$ → Chọn (D)



13. $S = \frac{1}{2}a^2,\ p = a + \frac{a\sqrt{2}}{2}$

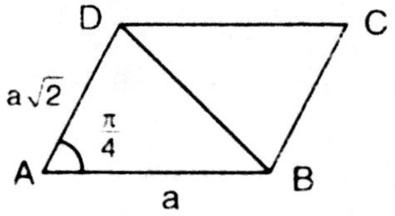
$r = \frac{S}{p} = \frac{\frac{a^2}{2}}{\frac{2a + a\sqrt{2}}{2}} = \frac{a}{2 + \sqrt{2}}$ → Chọn (C)



14. $S = 2Dt(\Delta ABD)$

$S = AB.AD\sin 45^0 = a^2\sqrt{2}\,.\,\frac{\sqrt{2}}{2} = a^2.$

Chọn (C)

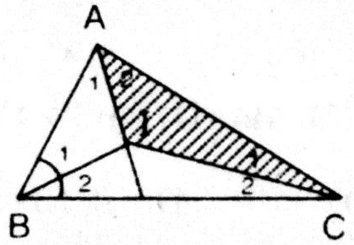


15. Ta có $\hat{A} + \hat{C} = 120^0 \Rightarrow \hat{A}_2 + \hat{C}_1 = 60^0$

$\Rightarrow \widehat{AIC} = 120^0$

ΔIAC có: $\frac{AC}{\sin\widehat{AIC}} = 2R$

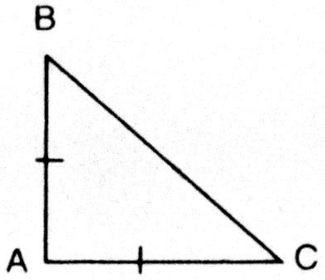
$\Rightarrow 2R = \frac{2\sqrt{3}}{\sin 120^0} = \frac{2\sqrt{3}}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = 4$ → Chọn (A)



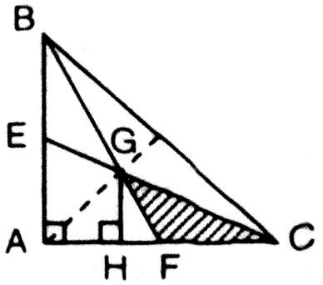
16. Gọi $AB = AC = a \Rightarrow S = \frac{1}{2}a^2.$

$S = \frac{abc}{4R} \Rightarrow R = \frac{a^3.\sqrt{2}}{2a^2} = \frac{a\sqrt{2}}{2}$

$S = pr \Rightarrow r = \frac{\frac{1}{2}a^2}{a + \frac{a\sqrt{2}}{2}} = \frac{a}{2 + \sqrt{2}}.$



Vậy $\frac{R}{r} = \frac{a\sqrt{2}}{2} \times \frac{2 + \sqrt{2}}{a} = \frac{2\sqrt{2} + 2}{2} = 1 + \sqrt{2}$ → Chọn (A)

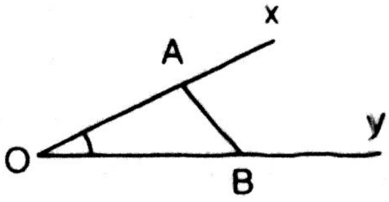


17. Vẽ GH ⊥ AC $\Rightarrow \dfrac{GH}{EA} = \dfrac{GC}{CE} = \dfrac{2}{3}$

$$\Rightarrow GH = \frac{2}{3}.\frac{a}{2} = \frac{a}{3}.$$

$$Dt(\Delta GFC) = \frac{1}{2}.GH.FC$$

$$= \frac{1}{2}.\frac{a}{3}.\frac{a}{2} = \frac{a^2}{12} \rightarrow \text{Chọn (B)}$$



18. Do định lí hàm sin: $\dfrac{AB}{\sin O} = \dfrac{OB}{\sin A}$

$$\Rightarrow OB = \frac{1\sin A}{\frac{1}{2}} \le 2 \rightarrow \text{Chọn (B)}$$

19. $$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos A$$

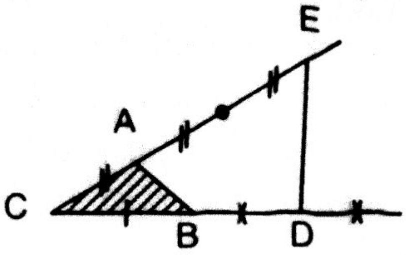
$$\Rightarrow \cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}$$

Nếu $b^2 + c^2 > a^2 \Rightarrow \cos A > 0 \Rightarrow$ A nhọn → (A) đúng

Nếu $b^2 + c^2 < a^2 \Rightarrow \cos A < 0 \Rightarrow$ A tù → (B) đúng

Nếu $b^2 + c^2 = a^2 \Rightarrow A = 90^0$ → (C) đúng

Do đó (D) sai → Chọn (D)



20. $$Dt(\Delta CED) = \frac{1}{2}CE.CD.\sin C$$

$$= \frac{1}{2}(3CA).(2CB).\sin C$$

$$= 6(\frac{1}{2}CA.CB.\sin C) = 6S \rightarrow \text{Chọn (D)}$$

Chương 4. NHẬN DẠNG TAM GIÁC

Vấn đề 1. TÍNH CÁC GÓC CỦA TAM GIÁC

Bài 1. Cho ΔABC và $V = \cos^2A + \cos^2B + \cos^2C - 1$. Chứng minh:

a) Nếu $V = 0$ thì ΔABC có một góc vuông

b) Nếu $V < 0$ thì ΔABC có ba góc nhọn

c) Nếu $V > 0$ thì ΔABC có một góc tù

Giải

Ta có: $V = \frac{1}{2}(1 + \cos2A) + \frac{1}{2}(1 + \cos2B) + \cos^2C - 1$

$$\Leftrightarrow V = \frac{1}{2}(\cos2A + \cos2B) + \cos^2C$$

$$\Leftrightarrow V = \cos(A + B).\cos(A - B) + \cos^2C$$

$$\Leftrightarrow V = -\cos C.\cos(A - B) + \cos^2C$$

$$\Leftrightarrow V = -\cos C\left[\cos(A - B) + \cos(A + B)\right]$$

$$\Leftrightarrow V = -2\cos C\cos A\cos B$$

Do đó:

a) $V = 0 \Leftrightarrow \cos A = 0 \vee \cos B = 0 \vee \cos C = 0$

$\Leftrightarrow \Delta ABC \perp$ tại A hay $\Delta ABC \perp$ tại B hay $\Delta ABC \perp$ tại C

b) $V < 0 \Leftrightarrow \cos A.\cos B.\cos C > 0 \Leftrightarrow \Delta ABC$ có ba góc nhọn

(vì trong 1 tam giác không thể có nhiều hơn 1 góc tù nên không có trường hợp có 2 cos cùng âm)

c) $V > 0 \Leftrightarrow \cos A.\cos B.\cos C < 0$

$\Leftrightarrow \cos A < 0 \vee \cos B < 0 \vee \cos C < 0$

$\Leftrightarrow \Delta ABC$ có 1 góc tù. ■

Bài 2. Tính các góc của ΔABC biết:

$$\cos2A + \sqrt{3}(\cos2B + \cos2C) + \frac{5}{2} = 0 \quad (*)$$

Giải

Ta có: $(*) \Leftrightarrow 2\cos^2 A - 1 + 2\sqrt{3}\left[\cos(B+C)\cos(B-C)\right] + \dfrac{5}{2} = 0$

$$\Leftrightarrow 4\cos^2 A - 4\sqrt{3}\cos A.\cos(B-C) + 3 = 0$$

$$\Leftrightarrow \left[2\cos A - \sqrt{3}\cos(B-C)\right]^2 + 3 - 3\cos^2(B-C) = 0$$

$$\Leftrightarrow \left[2\cos A - \sqrt{3}\cos(B-C)\right]^2 + 3\sin^2(B-C) = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases}\sin(B-C) = 0\\ \cos A = \dfrac{\sqrt{3}}{2}\cos(B-C)\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}B - C = 0\\ \cos A = \dfrac{\sqrt{3}}{2}\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases}A = 30^0\\ B = C = 75^0\end{cases} .\blacksquare$$

Bài 3. Chứng minh ΔABC có $C = 120^0$ nếu:

$$\sin A + \sin B + \sin C - 2\sin\frac{A}{2}\cdot\sin\frac{B}{2} = 2\sin\frac{C}{2} (*)$$

Giải

Ta có

$$(*) \Leftrightarrow 2\sin\frac{A+B}{2}\cos\frac{A-B}{2} + 2\sin\frac{C}{2}\cos\frac{C}{2} = 2\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2} + 2\sin\frac{C}{2}$$

$$\Leftrightarrow 2\cos\frac{C}{2}\cos\frac{A-B}{2} + 2\sin\frac{C}{2}\cos\frac{C}{2} = 2\cos\frac{A+B}{2} + 2\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}$$

$$\Leftrightarrow \cos\frac{C}{2}\left(\cos\frac{A-B}{2} + \sin\frac{C}{2}\right) = \cos\frac{A}{2}\cdot\cos\frac{B}{2}$$

$$\Leftrightarrow \cos\frac{C}{2}\left[\cos\frac{A-B}{2} + \cos\frac{A+B}{2}\right] = \cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}$$

$$\Leftrightarrow 2\cos\frac{C}{2}\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2} = \cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}$$

$$\Leftrightarrow \cos\frac{C}{2} = \frac{1}{2} \text{ (do } \cos\frac{A}{2} > 0 \text{ và } \cos\frac{B}{2} > 0 \text{ vì } 0 < \frac{A}{2};\frac{B}{2} < \frac{\pi}{2})$$

$$\Leftrightarrow C = 120^0 .\blacksquare$$

Bài 4. Tính các góc của ΔABC biết số đo 3 góc tạo cấp số cộng và

$$\sin A + \sin B + \sin C = \frac{3+\sqrt{3}}{2}$$

Giải

Không làm mất tính chất tổng quát của bài toán giả sử $A < B < C$

Ta có: A, B, C tạo 1 cấp số cộng nên $A + C = 2B$

Mà $A + B + C = \pi$ nên $B = \dfrac{\pi}{3}$

Lúc đó: $\sin A + \sin B + \sin C = \dfrac{3+\sqrt{3}}{2}$

$$\Leftrightarrow \sin A + \sin\frac{\pi}{3} + \sin C = \frac{3+\sqrt{3}}{2} \Leftrightarrow \sin A + \sin C = \frac{3}{2}$$

$$\Leftrightarrow 2\sin\frac{A+C}{2}\cos\frac{A-C}{2} = \frac{3}{2} \Leftrightarrow 2\cos\frac{B}{2}\cos\frac{A-C}{2} = \frac{3}{2}.$$

$$\Leftrightarrow 2.\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\cos\frac{A-C}{2} = \frac{3}{2} \Leftrightarrow \cos\frac{C-A}{2} = \frac{\sqrt{3}}{2} = \cos\frac{\pi}{6}$$

Do $C > A$ nên ΔABC có: $\begin{cases} \dfrac{C-A}{2} = \dfrac{\pi}{6} \\ C + A = \dfrac{2\pi}{3} \\ B = \dfrac{\pi}{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} C = \dfrac{\pi}{2} \\ A = \dfrac{\pi}{6} \\ B = \dfrac{\pi}{3} \end{cases}$. ■

Bài 5. Tính các góc của ΔABC nếu

$$\begin{cases} b^2 + c^2 \le a^2 & (1) \\ \sin A + \sin B + \sin C = 1 + \sqrt{2} & (2) \end{cases}$$

Giải

Áp dụng định lý hàm cosin: $\cos A = \dfrac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}$

Do (1): $b^2 + c^2 \le a^2$ nên $\cos A \le 0$

Do đó: $\dfrac{\pi}{2} \le A < \pi \Leftrightarrow \dfrac{\pi}{4} \le \dfrac{A}{2} < \dfrac{\pi}{2}$

Vậy $\cos\dfrac{A}{2} \le \cos\dfrac{\pi}{4} = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$ (*)

Mặt khác: $\sin A + \sin B + \sin C = \sin A + 2\sin\dfrac{B+C}{2}\cos\dfrac{B-C}{2}$

$$= \sin A + 2\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B-C}{2}$$

$$\Rightarrow \sin A + \sin B + \sin C \le 1 + 2\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\cdot 1 \quad \left(\text{do}(*)\text{ và } \cos\frac{B-C}{2} \le 1\right)$$

Mà $\sin A + \sin B + \sin C = 1 + \sqrt{2}$ do (2)

Dấu "=" tại (2) xảy ra $\Leftrightarrow \begin{cases} \sin A = 1 \\ \cos\frac{A}{2} = \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \cos\frac{B-C}{2} = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A = \frac{\pi}{2} \\ B = C = \frac{\pi}{4} \end{cases}$.■

Bài 6*. (Đề thi tuyển sinh Đại học khối A, năm 2004))

Cho ΔABC không tù thỏa điều kiện:

$\cos 2A + 2\sqrt{2}\cos B + 2\sqrt{2}\cos C = 3$ (*). Tính ba góc của ΔABC

Giải

* *Cách 1*: Đặt $M = \cos 2A + 2\sqrt{2}\cos B + 2\sqrt{2}\cos C - 3$

Ta có: $M = 2\cos^2 A + 4\sqrt{2}\cos\frac{B+C}{2}\cos\frac{B-C}{2} - 4$

$$\Leftrightarrow M = 2\cos^2 A + 4\sqrt{2}\sin\frac{A}{2}\cos\frac{B-C}{2} - 4$$

Do $\sin\frac{A}{2} > 0$ và $\cos\frac{B-C}{2} \le 1$

Nên $M \le 2\cos^2 A + 4\sqrt{2}\sin\frac{A}{2} - 4$

Mặt khác: ΔABC không tù nên $0 < A \le \frac{\pi}{2} \Rightarrow 0 \le \cos A \le 1$

$$\Rightarrow \cos^2 A \ge \cos A$$

Do đó: $M \le 2\cos A + 4\sqrt{2}\sin\frac{A}{2} - 4$

$$\Leftrightarrow M \le \left(1 - 2\sin^2\frac{A}{2}\right) + 4\sqrt{2}\sin\frac{A}{2} - 4$$

$$\Leftrightarrow M \le -4\sin^2\frac{A}{2} + 4\sqrt{2}\sin\frac{A}{2} - 2$$

$$\Leftrightarrow M \le -2\left(\sqrt{2}\sin\frac{A}{2} - 1\right)^2 \le 0$$

Do giả thiết (*) ta có $M = 0$

$$\text{Vậy: }\begin{cases}\cos^2 A = \cos A\\ \cos\dfrac{B-C}{2} = 1\\ \sin\dfrac{A}{2} = \dfrac{1}{\sqrt{2}}\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}A = 90^\circ\\ B = C = 45^\circ\end{cases}$$

* *Cách 2:* (*) $\Leftrightarrow \cos 2A + 2\sqrt{2}\cos B + 2\sqrt{2}\cos C - 3 = 0$

$$\Leftrightarrow \cos^2 A + 2\sqrt{2}\cos\frac{B+C}{2}\cos\frac{B-C}{2} - 2 = 0$$

$$\Leftrightarrow \left(\cos^2 A - \cos A\right) + \cos A + 2\sqrt{2}\sin\frac{A}{2}\cos\frac{B-C}{2} - 2 = 0$$

$$\Leftrightarrow \cos A(\cos A - 1) + \left(1 - 2\sin^2\frac{A}{2}\right) + 2\sqrt{2}\sin\frac{A}{2}\cos\frac{B-C}{2} - 2 = 0$$

$$\Leftrightarrow \cos A(\cos A - 1) - \left(\sqrt{2}\sin\frac{A}{2} - \cos\frac{B-C}{2}\right)^2 - \left(1 - \cos^2\frac{B-C}{2}\right) = 0$$

$$\Leftrightarrow \cos A(\cos A - 1) - \left(\sqrt{2}\sin\frac{A}{2} - \cos\frac{B-C}{2}\right)^2 - \sin^2\frac{B-C}{2} = 0(*)$$

Do ΔABC không tù nên $\cos A \geq 0$và $\cos A - 1 < 0$

Vậy vế trái của (*) luôn ≤ 0

$$\text{Dấu "=" xảy ra} \Leftrightarrow \begin{cases}\cos A = 0\\ \sqrt{2}\sin\dfrac{A}{2} = \cos\dfrac{B-C}{2}\\ \sin\dfrac{B-C}{2} = 0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}A = 90^\circ\\ B = C = 45^\circ\end{cases}. \blacksquare$$

Bài 7. Chứng minh ΔABC có ít nhất 1 góc 60° khi và chỉ khi

$$\frac{\sin A + \sin B + \sin C}{\cos A + \cos B + \cos C} = \sqrt{3} \quad (*)$$

Giải

Ta có:

$$(*) \Leftrightarrow \left(\sin A - \sqrt{3}\cos A\right) + \left(\sin B - \sqrt{3}\cos B\right) + \left(\sin C - \sqrt{3}\cos C\right) = 0$$

$$\Leftrightarrow \sin\left(A - \frac{\pi}{3}\right) + \sin\left(B - \frac{\pi}{3}\right) + \sin\left(C - \frac{\pi}{3}\right) = 0$$

$$\Leftrightarrow 2\sin\left(\frac{A+B}{2} - \frac{\pi}{3}\right)\cos\frac{A-B}{2} + \sin\left(C - \frac{\pi}{3}\right) = 0$$

$$\Leftrightarrow 2\sin\left[\left(\frac{\pi}{2}-\frac{C}{2}\right)-\frac{\pi}{3}\right]\cos\frac{A-B}{2}+2\sin\left(\frac{C}{2}-\frac{\pi}{6}\right)\cos\left(\frac{C}{2}-\frac{\pi}{6}\right)=0$$

$$\Leftrightarrow 2\sin\left(\frac{C}{2}-\frac{\pi}{6}\right)\left[-\cos\frac{A-B}{2}+\cos\left(\frac{C}{2}-\frac{\pi}{6}\right)\right]=0$$

$$\Leftrightarrow \sin\left(\frac{C}{2}-\frac{\pi}{6}\right)=0\vee\cos\frac{A-B}{2}=\cos\left(\frac{C}{2}-\frac{\pi}{6}\right)=\cos\left(\frac{\pi}{3}-\frac{A+B}{2}\right)$$

$$\Leftrightarrow \frac{C}{2}=\frac{\pi}{6}\vee\frac{A-B}{2}=\frac{\pi}{3}-\frac{A+B}{2}\vee\frac{-A+B}{2}=\frac{\pi}{3}-\frac{A+B}{2}$$

$$\Leftrightarrow C=\frac{\pi}{3}\vee A=\frac{\pi}{3}\vee B=\frac{\pi}{3}.\ ■$$

Bài 8. Tính các góc của ΔABC nếu:

$$\sin(B+C)+\sin(C+A)+\cos(A+B)=\frac{3}{2}\quad(*)$$

Giải

Do $A+B+C=\pi$

Nên: $(*)\Leftrightarrow \sin A+\sin B-\cos C=\dfrac{3}{2}$

$$\Leftrightarrow 2\sin\frac{A+B}{2}\cos\frac{A-B}{2}-\left(2\cos^2\frac{C}{2}-1\right)=\frac{3}{2}$$

$$\Leftrightarrow 2\cos\frac{C}{2}\cos\frac{A-B}{2}-2\cos^2\frac{C}{2}=\frac{1}{2}$$

$$\Leftrightarrow 4\cos^2\frac{C}{2}-4\cos\frac{C}{2}\cos\frac{A-B}{2}+1=0$$

$$\Leftrightarrow \left(2\cos\frac{C}{2}-\cos\frac{A-B}{2}\right)^2+1-\cos^2\frac{A-B}{2}=0$$

$$\Leftrightarrow \left(2\cos\frac{C}{2}-\cos\frac{A-B}{2}\right)^2+\sin^2\frac{A-B}{2}=0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases}2\cos\dfrac{C}{2}=\cos\dfrac{A-B}{2}\\ \sin\dfrac{A-B}{2}=0\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases}2\cos\dfrac{C}{2}=\cos 0=1\\ \dfrac{A-B}{2}=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\dfrac{C}{2}=\dfrac{\pi}{3}\\ A=B\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}A=B=\dfrac{\pi}{6}\\ C=\dfrac{2\pi}{3}\end{cases}.\ ■$$

Vấn đề 2. TAM GIÁC VUÔNG

Bài 9. Cho ΔABC có $\cot\dfrac{B}{2}=\dfrac{a+c}{b}$. Chứng minh ΔABC vuông

Giải

Ta có: $\cot\dfrac{B}{2}=\dfrac{a+c}{b}$

$$\Leftrightarrow \frac{\cos\frac{B}{2}}{\sin\frac{B}{2}}=\frac{2R\sin A+2R\sin C}{2R\sin B}=\frac{\sin A+\sin C}{\sin B}$$

$$\Leftrightarrow \frac{\cos\frac{B}{2}}{\sin\frac{B}{2}}=\frac{2\sin\frac{A+C}{2}.\cos\frac{A-C}{2}}{2\sin\frac{B}{2}.\cos\frac{B}{2}}$$

$$\Leftrightarrow \cos^2\frac{B}{2}=\cos\frac{B}{2}.\cos\frac{A-C}{2}\quad (\text{do } \sin\frac{B}{2}>0)$$

$$\Leftrightarrow \cos\frac{B}{2}=\cos\frac{A-C}{2}\quad (\text{do } \cos\frac{B}{2}>0)$$

$$\Leftrightarrow \frac{B}{2}=\frac{A-C}{2}\vee\frac{B}{2}=\frac{C-A}{2}$$

$$\Leftrightarrow A=B+C\vee C=A+B\Leftrightarrow A=\frac{\pi}{2}\vee C=\frac{\pi}{2}$$

$\Leftrightarrow$ ΔABC vuông tại A hay ΔABC vuông tại C. ■

Bài 10. Chứng minh ΔABC vuông tại A nếu

$$\frac{b}{\cos B}+\frac{c}{\cos C}=\frac{a}{\sin B\sin C}$$

Giải

Ta có: $\dfrac{b}{\cos B}+\dfrac{c}{\cos C}=\dfrac{a}{\sin B\sin C}$

$$\Leftrightarrow \frac{2R\sin B}{\cos B}+\frac{2R\sin C}{\cos C}=\frac{2R\sin A}{\sin B\sin C}$$

$$\Leftrightarrow \frac{\sin B\cos C+\sin C\cos B}{\cos B.\cos C}=\frac{\sin A}{\sin B\sin C}$$

$$\Leftrightarrow \frac{\sin(B+C)}{\cos B.\cos C}=\frac{\sin A}{\sin B\sin C}$$

$\Leftrightarrow \cos B\cos C = \sin B\sin C$ (do $\sin A > 0$

$\Leftrightarrow \cos B.\cos C - \sin B.\sin C = 0 \Leftrightarrow \cos(B + C) = 0$

$\Leftrightarrow B + C = \frac{\pi}{2} \Leftrightarrow \Delta ABC$ vuông tại A. ■

Bài 11. Chứng minh ΔABC vuông nếu:

$$3(\cos B + 2\sin C) + 4(\sin B + 2\cos C) = 15$$

Giải

Do bất đẳng thức Bunhiacốpki ta có:

$$3\cos B + 4\sin B \le \sqrt{9 + 16}\sqrt{\cos^2 B + \sin^2 B} = 15$$

và $\quad 6\sin C + 8\cos C \le \sqrt{36 + 64}\sqrt{\sin^2 C + \cos^2 C} = 10$

nên: $\quad 3(\cos B + 2\sin C) + 4(\sin B + 2\cos C) \le 15$

Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{\cos B}{3} = \dfrac{\sin B}{4} \\ \dfrac{\sin C}{6} = \dfrac{\cos C}{8} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \tan B = \dfrac{4}{3} \\ \cot C = \dfrac{4}{3} \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \tan B = \cot C \Leftrightarrow B + C = \frac{\pi}{2}$$

$\Leftrightarrow \Delta ABC$ vuông tại A. ■

Bài 12. Cho ΔABC có: $\sin 2A + \sin 2B = 4\sin A.\sin B$

Chứng minh ΔABC vuông.

Giải

Ta có: $\sin 2A + \sin 2B = 4\sin A.\sin B$

$\Leftrightarrow 2\sin(A + B)\cos(A - B) = -2[\cos(A + B) - \cos(A - B)]$

$\Leftrightarrow \cos(A + B) = [1 - \sin(A + B)]\cos(A - B)$

$\Leftrightarrow -\cos C = [1 - \sin C]\cos(A - B)$

$\Leftrightarrow -\cos C(1 + \sin C) = (1 - \sin^2 C).\cos(A - B)$

$\Leftrightarrow -\cos C(1 + \sin C) = \cos^2 C.\cos(A - B)$

$\Leftrightarrow \cos C = 0$ hoặc $-(1 + \sin C) = \cos C.\cos(A - B)$ (*)

$\Leftrightarrow \cos C = 0$

(Do $\sin C > 0$ nên $-(1 + \sin C) < -1$. Mà $\cos C.\cos(A - B) \geq -1$. Vậy (*) vô nghiệm.)

Do đó ΔABC vuông tại C. ■

Vấn đề 3. TAM GIÁC CÂN

Bài 13. Chứng minh nếu ΔABC có $\tan A + \tan B = 2\cot\frac{C}{2}$ thì là tam giác cân.

Giải

Ta có: $\tan A + \tan B = 2\cot\frac{C}{2} \Leftrightarrow \dfrac{\sin(A+B)}{\cos A.\cos B} = \dfrac{2\cos\frac{C}{2}}{\sin\frac{C}{2}}$

$$\Leftrightarrow \frac{\sin C}{\cos A.\cos B} = \frac{2\cos\frac{C}{2}}{\sin\frac{C}{2}} \Leftrightarrow \frac{2\sin\frac{C}{2}\cos\frac{C}{2}}{\cos A\cos B} = \frac{2\cos\frac{C}{2}}{\sin\frac{C}{2}}$$

$$\Leftrightarrow \sin^2\frac{C}{2} = \cos A.\cos B \left(\text{do } \cos\frac{C}{2} > 0\right)$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{2}(1 - \cos C) = \frac{1}{2}\left[\cos(A+B) + \cos(A-B)\right]$$

$$\Leftrightarrow 1 - \cos C = -\cos C + \cos(A - B) \Leftrightarrow \cos(A - B) = 1$$

$\Leftrightarrow A = B \Leftrightarrow \Delta ABC$ cân tại C. ■

Bài 14. Chứng minh ΔABC cân nếu:

$$\sin\frac{A}{2}.\cos^3\frac{B}{2} = \sin\frac{B}{2}.\cos^3\frac{A}{2}$$

Giải

Ta có: $\sin\frac{A}{2}.\cos^3\frac{B}{2} = \sin\frac{B}{2}.\cos^3\frac{A}{2}$

$$\Leftrightarrow \left(\frac{\sin\frac{A}{2}}{\cos\frac{A}{2}}\right)\frac{1}{\cos^2\frac{A}{2}} = \left(\frac{\sin\frac{B}{2}}{\cos\frac{B}{2}}\right)\frac{1}{\cos^2\frac{B}{2}} \text{ (do } \cos\frac{A}{2} > 0 \text{ và } \cos\frac{B}{2} > 0\text{)}$$

$$\Leftrightarrow \tan\frac{A}{2}\left(1+\tan^2\frac{A}{2}\right)=\tan\frac{B}{2}\left(1+\tan^2\frac{B}{2}\right)$$

$$\Leftrightarrow \tan^3\frac{A}{2}-\tan^3\frac{B}{2}+\tan\frac{A}{2}-\tan\frac{B}{2}=0$$

$$\Leftrightarrow \left(\tan\frac{A}{2}-\tan\frac{B}{2}\right)\left[1+\tan^2\frac{A}{2}+\tan^2\frac{B}{2}+\tan\frac{A}{2}.\tan\frac{B}{2}\right]=0\ (*)$$

$$\Leftrightarrow \tan\frac{A}{2}=\tan\frac{B}{2}\ \left(\text{vì } 1+\tan^2\frac{A}{2}+\tan^2\frac{B}{2}+\tan\frac{A}{2}\tan\frac{B}{2}>0\right)$$

$\Leftrightarrow A = B \Leftrightarrow \Delta ABC$ cân tại C.■

Bài 15. Chứng minh ΔABC cân nếu:

$$\frac{\cos^2A+\cos^2B}{\sin^2A+\sin^2B}=\frac{1}{2}\left(\cot^2A+\cot^2B\right)\ (*)$$

Giải

Ta có: $(*) \Leftrightarrow \dfrac{\cos^2A+\cos^2B}{\sin^2A+\sin^2B}=\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{\sin^2A}+\dfrac{1}{\sin^2B}-2\right)$

$$\Leftrightarrow \frac{\cos^2A+\cos^2B}{\sin^2A+\sin^2B}+1=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{\sin^2A}+\frac{1}{\sin^2B}\right)$$

$$\Leftrightarrow \frac{2}{\sin^2A+\sin^2B}=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{\sin^2A}+\frac{1}{\sin^2B}\right)$$

$$\Leftrightarrow 4\sin^2A\sin^2B=\left(\sin^2A+\sin^2B\right)^2$$

$$\Leftrightarrow 0=\left(\sin^2A-\sin^2B\right)^2$$

$\Leftrightarrow \sin A = \sin B \Leftrightarrow \Delta ABC$ cân tại C.■

Vấn đề 4. NHẬN DẠNG TAM GIÁC

Bài 16. Cho ΔABC thỏa: $a\cos B - b\cos A = a\sin A - b\sin B$ (*)

Chứng minh ΔABC vuông hay cân

Giải

Do định lý hàm sin: $a = 2R\sin A$, $b = 2R\sin B$

Nên $(*) \Leftrightarrow 2R\sin A\cos B - 2R\sin B\cos A = 2R\left(\sin^2A-\sin^2B\right)$

$$\Leftrightarrow \sin A\cos B-\sin B\cos A=\sin^2A-\sin^2B$$

$$\Leftrightarrow \sin(A - B) = \frac{1}{2}(1 - \cos 2A) - \frac{1}{2}(1 - \cos 2B)$$

$$\Leftrightarrow \sin(A - B) = \frac{1}{2}[\cos 2B - \cos 2A]$$

$$\Leftrightarrow \sin(A - B) = -[\sin(A + B)\sin(B - A)]$$

$$\Leftrightarrow \sin(A - B)[1 - \sin(A + B)] = 0$$

$$\Leftrightarrow \sin(A - B) = 0 \vee \sin(A + B) = 1$$

$$\Leftrightarrow A = B \vee A + B = \frac{\pi}{2}$$

$\Rightarrow \Delta ABC$ vuông hay cân tại C.

Cách khác

$$\sin A\cos B - \sin B\cos A = \sin^2 A - \sin^2 B$$

$$\Leftrightarrow \sin(A - B) = (\sin A + \sin B)(\sin A - \sin B)$$

$$\Leftrightarrow \sin(A - B) = \left(2\sin\frac{A + B}{2}\cos\frac{A - B}{2}\right)\left(2\cos\frac{A + B}{2}\sin\frac{A - B}{2}\right)$$

$$\Leftrightarrow \sin(A - B) = \sin(A + B)\sin(A - B)$$

$$\Leftrightarrow \sin(A - B) = 0 \vee \sin(A + B) = 1$$

$$\Leftrightarrow A = B \vee A + B = \frac{\pi}{2}. \blacksquare$$

Bài 17. ΔABC là tam giác gì nếu:

$$(a^2 + b^2)\sin(A - B) = (a^2 - b^2)\sin(A + B) \quad (*)$$

Giải

Ta có: (*)

$$\Rightarrow (4R^2\sin^2 A + 4R^2\sin^2 B)\sin(A - B) = 4R^2(\sin^2 A - \sin^2 B)\sin(A + B)$$

$$\Rightarrow \sin^2 A[\sin(A - B) - \sin(A + B)] + \sin^2 B[\sin(A - B) + \sin(A + B)] = 0$$

$$\Rightarrow 2\sin^2 A\cos A\sin(-B) + 2\sin^2 B\sin A\cos B = 0$$

$$\Rightarrow -\sin A\cos A + \sin B\cos B = 0 \text{ (do } \sin A > 0 \text{ và } \sin B > 0)$$

$$\Rightarrow \sin 2A = \sin 2B$$

$$\Rightarrow 2A = 2B \vee 2A = \pi - 2B$$

$$\Rightarrow A = B \vee A + B = \frac{\pi}{2}$$

Vậy ΔABC cân tại **C** hay **ΔABC** vuông tại **C**. ■

Bài 18. ΔABC là tam giác gì nếu:

$$\begin{cases} a^2\sin 2B + b^2\sin 2A = 4ab\cos A\sin B & (1) \\ \sin 2A + \sin 2B = 4\sin A\sin B & (2) \end{cases}$$

Giải

Ta có:

$$(1) \Leftrightarrow 4R^2\sin^2 A\sin 2B + 4R^2\sin^2 B\sin 2A = 16R^2\sin A\sin^2 B\cos A$$

$$\Leftrightarrow \sin^2 A\sin 2B + \sin^2 B\sin 2A = 4\sin A\sin^2 B\cos A$$

$$\Leftrightarrow 2\sin^2 A\sin B\cos B + 2\sin A\cos A\sin^2 B = 4\sin A\sin^2 B\cos A$$

$$\Leftrightarrow \sin A\cos B + \sin B\cos A = 2\sin B\cos A (\text{do} \sin A > 0, \sin B > 0)$$

$$\Leftrightarrow \sin A\cos B - \sin B\cos A = 0 \Leftrightarrow \sin(A - B) = 0 \Leftrightarrow A = B$$

Thay vào (2) ta được: $\sin 2A = 2\sin^2 A \Leftrightarrow 2\sin A\cos A = 2\sin^2 A$

$$\Leftrightarrow \cos A = \sin A (\text{do } \sin A > 0)$$

$$\Leftrightarrow \tan A = 1 \Leftrightarrow A = \frac{\pi}{4}$$

Do đó ΔABC vuông cân tại C. ■

Vấn đề 5. TAM GIÁC ĐỀU

Bài 19. Chứng minh ΔABC đều nếu: $bc\sqrt{3} = R\left[2(b + c) - a\right]$ (*)

Giải

Ta có:

$$(*) \Leftrightarrow (2R\sin B)(2R\sin C)\sqrt{3} = R\left[2(2R\sin B + 2R\sin C) - 2R\sin A\right]$$

$$\Leftrightarrow 2\sqrt{3}\sin B\sin C = 2(\sin B + \sin C) - \sin(B + C)$$

$$\Leftrightarrow 2\sqrt{3}\sin B\sin C = 2(\sin B + \sin C) - \sin B\cos C - \sin C\cos B$$

$$\Leftrightarrow 2\sin B\left[1 - \frac{1}{2}\cos C - \frac{\sqrt{3}}{2}\sin C\right] + 2\sin C\left[1 - \frac{1}{2}\cos B - \frac{\sqrt{3}}{2}\sin B\right] = 0$$

$$\Leftrightarrow \sin B\left[1 - \cos\left(C - \frac{\pi}{3}\right)\right] + \sin C\left[1 - \cos\left(B - \frac{\pi}{3}\right)\right] = 0 \quad (1)$$

Do $\sin B > 0$ và $1 - \cos\left(C - \frac{\pi}{3}\right) \geq 0$

$\sin C > 0$ và $1 - \cos\left(B - \frac{\pi}{3}\right) \geq 0$

Nên vế trái của (1) luôn ≥ 0

Do đó, (1) $\Leftrightarrow \begin{cases} \cos\left(C - \dfrac{\pi}{3}\right) = 1 \\ \cos\left(B - \dfrac{\pi}{3}\right) = 1 \end{cases} \Leftrightarrow C = B = \dfrac{\pi}{3} \Leftrightarrow \Delta ABC$ đều. ■

Bài 20. Chứng minh ΔABC đều nếu $\begin{cases} \sin B \sin C = \dfrac{3}{4} & (1) \\ a^2 = \dfrac{a^3 - b^3 - c^3}{a - b - c} & (2) \end{cases}$

Giải

Ta có: (2) $\Leftrightarrow a^3 - a^2b - a^2c = a^3 - b^3 - c^3$

$$\Leftrightarrow a^2(b + c) = b^3 + c^3$$

$$\Leftrightarrow a^2(b + c) = (b + c)(b^2 - bc + c^2)$$

$$\Leftrightarrow a^2 = b^2 - bc + c^2$$

$\Leftrightarrow b^2 + c^2 - 2bc\cos A = b^2 + c^2 - bc$ (do đl hàm cosin)

$$\Leftrightarrow 2bc\cos A = bc$$

$$\Leftrightarrow \cos A = \frac{1}{2} \Leftrightarrow A = \frac{\pi}{3} \qquad (1)$$

Ta có: (1) $\Leftrightarrow 4\sin B \sin C = 3$

$$\Leftrightarrow 2\left[\cos(B - C) - \cos(B + C)\right] = 3$$

$$\Leftrightarrow 2\left[\cos(B - C) + \cos A\right] = 3$$

$\Leftrightarrow 2\cos(B - C) + 2\left(\dfrac{1}{2}\right) = 3$ $\left(\text{do (1) ta có } A = \dfrac{\pi}{3}\right)$

$$\Leftrightarrow \cos(B - C) = 1 \Leftrightarrow B = C \qquad (2)$$

Vậy từ (1), (2) ta có ΔABC đều. ■

Bài 21. Chứng minh ΔABC đều nếu:

$$\sin A + \sin B + \sin C = \sin 2A + \sin 2B + \sin 2C$$

Giải

Ta có: $\sin 2A + \sin 2B = 2\sin(A + B)\cos(A - B)$

$$= 2\sin C\cos(A - B) \le 2\sin C \qquad (1)$$

Dấu "=" xảy ra khi: $\cos(A - B) = 1$

Tương tự: $\sin 2A + \sin 2C \le 2\sin B$ (2)

Dấu "=" xảy ra khi: $\cos(A - C) = 1$

Tương tự: $\sin 2B + \sin 2C \le 2\sin A$ (3)

Dấu "=" xảy ra khi: $\cos(B - C) = 1$

Từ (1) (2) (3) ta có: $2(\sin 2A + \sin 2B + \sin 2C) \le 2(\sin C + \sin B + \sin A)$

Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow \begin{cases} \cos(A - B) = 1 \\ \cos(A - C) = 1 \\ \cos(B - C) = 1 \end{cases} \Leftrightarrow A = B = C \Leftrightarrow \Delta ABC$ đều. ■

Bài 22. Chứng minh ΔABC đều nếu

$$\cot A + \cot B + \cot C = \tan\frac{A}{2} + \tan\frac{B}{2} + \tan\frac{C}{2} \quad (*)$$

Giải

Ta có: $\cot A + \cot B = \dfrac{\sin(A + B)}{\sin A \sin B} = \dfrac{\sin C}{\sin A \sin B}$

$\ge \dfrac{\sin C}{\left(\dfrac{\sin A + \sin B}{2}\right)^2}$ (do bđt Cauchy)

$$= \frac{2\sin\frac{C}{2}\cos\frac{C}{2}}{\sin^2\frac{A+B}{2}.\cos^2\frac{A-B}{2}} = \frac{2\sin\frac{C}{2}}{\cos\frac{C}{2}\cos^2\frac{A-B}{2}} \ge 2\tan\frac{C}{2} \quad (1)$$

Tương tự: $\cot A + \cot C \ge 2\tan\frac{B}{2}$ (2)

$\cot B + \cot C \ge 2\tan\frac{A}{2}$ (3)

Từ (1) (2) (3) ta có

$$2(\cot A + \cot B + \cot C) \ge 2\left(\tan\frac{A}{2} + \tan\frac{B}{2} + \tan\frac{C}{2}\right) \quad (4)$$

Do đó dấu "=" tại (4) xảy ra

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \cos\dfrac{A - B}{2} = \cos\dfrac{A - C}{2} = \cos\dfrac{B - C}{2} = 1 \\ \sin A = \sin B = \sin C \end{cases}$$

$\Leftrightarrow A = B = C. \Leftrightarrow \Delta ABC$ đều. ■

BÀI TẬP TỰ GIẢI

1. Tính các góc của ΔABC biết:

a) $\cos A = \sin B + \sin C - \dfrac{3}{2}$ (ĐS: $B = C = \dfrac{\pi}{6}, A = \dfrac{2\pi}{3}$)

b) $\sin 6A + \sin 6B + \sin 6C = 0$ (ĐS: $A = B = C = \dfrac{\pi}{3}$)

c) $\sin 5A + \sin 5B + \sin 5C = 0$

2. Tính góc C của ΔABC biết:

a) $(1 + \cot A)(1 + \cot B) = 2$ b) $\begin{cases} A, B \text{ nhọn} \\ \sin^2 A + \sin^2 B = \sqrt[9]{\sin C} \end{cases}$

3. Cho ΔABC có: $\begin{cases} \cos^2 A + \cos^2 B + \cos^2 C < 1 \\ \sin 5A + \sin 5B + \sin 5C = 0 \end{cases}$

Chứng minh Δ có ít nhất một góc 36^0.

4. Biết $\sin^2 A + \sin^2 B + \sin^2 C = m$. Chứng minh

a) $m = 2$ thì ΔABC vuông

b) $m > 2$ thì ΔABC nhọn

c) $m < 2$ thì ΔABC tù

5. Chứng minh ΔABC vuông nếu:

a) $\cos B + \cos C = \dfrac{b + c}{a}$

b) $\dfrac{b}{\cos B} + \dfrac{c}{\cos C} = \dfrac{a}{\sin B \sin C}$

c) $\sin A + \sin B + \sin C = 1 - \cos A + \cos B + \cos C$

d) $\dfrac{(b - c)^2}{b^2} = \dfrac{2\left[1 - \cos(B - C)\right]}{1 - \cos 2B}$

6. Chứng minh ΔABC cân nếu:

a) $\dfrac{1 + \cos B}{\sin B} = \dfrac{2a + c}{\sqrt{a^2 - c^2}}$

b) $\dfrac{\sin A + \sin B + \sin C}{\sin A + \sin B - \sin C} = \cot\dfrac{A}{2} . \cot\dfrac{B}{2}$

c) $\tan A + 2\tan B = \tan A.\tan^2 B$

d) $a\left(\cot\frac{C}{2} - \tan A\right) = b\left(\tan B - \cot\frac{C}{2}\right)$.

e) $(p - b)\cot\frac{C}{2} = p\tan\frac{B}{2}$

f) $a + b = \tan\frac{C}{2}(a\tan A + b\tan B)$

7. ΔABC là Δ gì nếu:

a) $a\tan B + b\tan A = (a + b)\tan\frac{A + B}{2}$ b) $c = c\cos 2B + b\sin 2B$

c) $\sin 3A + \sin 3B + \sin 3C = 0$ d) $4S = (a + b - c)(a + c - b)$

8. Chứng minh ΔABC đều nếu

a) $2(a\cos A + b\cos B + c\cos C) = a + b + c$

b) $3S = 2R^2(\sin^3 A + \sin^3 B + \sin^3 C)$

c) $\sin A + \sin B + \sin C = 4\sin A\sin B\sin C$

d) $m_a + m_b + m_c = \frac{9R}{2}$ với m_a, m_b, m_c là 3 đường trung tuyến.

10 CÂU HỎI TRẮC NGHIỆM

1. ΔABC có $\hat{A} = 60^0$ và $\sin B\sin C = \frac{3}{4}$ là tam giác:

(A) cân (B) đều (C) vuông (D) vuông cân.

2. Nếu $\tan A + \tan B = 2\cot\frac{C}{2}$ thì ΔABC là:

(A) cân (B) đều (C) vuông (D) vuông cân.

3. ΔABC có $\sin 4A + \sin 4B + \sin 4C = 0$ là tam giác:

(A) cân (B) đều (C) vuông (D) vuông cân.

4. ΔABC có các cạnh thỏa: $(a + b + c)(a + b - c) = 3ab$ thì số đo góc C là:

(A) 120^0 (B) 60^0 (C) 45^0 (D) 30^0.

5. Cho ΔABC có $\tan B = \cot C$ thì ΔABC:

(A) vuông tại A (B) cân tại A

(C) vuông tại B (D) vuông tại C.

6. Cho tam giác ABC có $\frac{4}{\sin^2 A + \sin^2 B} = \frac{1}{\sin^2 A} + \frac{1}{\sin^2 B}$ thì tam giác ABC

(A) cân tại A (B) cân tại B

(C) vuông tại A (D) vuông tại C.

7. Cho ΔABC có góc $B = 60^0$ và $\sin A + \sin C = \frac{3}{2}$ thì ΔABC là tam giác

(A) cân (B) đều (C) vuông (D) vuông cân.

8. Cho ΔABC có $\cos^2 A + \cos^2 B + \cos^2 C < 1$. Kết luận nào sau đây là đúng?

(A) ba góc Δ đều nhọn (B) Δ có 1 góc tù

(C) Δ có 1 góc 60^0 (D) Δ có 1 góc 90^0.

9. Cho ΔABC có 3 cạnh a, b, c thỏa: $(a + b + c).(ab + ac + bc) = 9abc$ thì ΔABC là:

(A) vuông (B) cân (C) vuông cân (D) đều.

10. Cho ΔABC có $\sin^2 \frac{C}{2} = \cos A \cos B$ thì ΔABC

(A) cân tại A (B) cân tại B (C) cân tại C (D) đều.

TRẢ LỜI

1. $\hat{A} = 60^0 \Rightarrow B + C = 120^0$

$$\Rightarrow \cos(B + C) = \cos B\cos C - \sin B\sin C$$

$$\Rightarrow -\frac{1}{2} = \cos B\cos C - \frac{3}{4}$$

$$\Rightarrow \cos B\cos C = \frac{1}{4}$$

Vậy $\cos(B - C) = \frac{1}{4} + \frac{3}{4} = 1$

$\Rightarrow B = C \Rightarrow \Delta ABC$ đều $\Rightarrow$ Chọn (B)

2. $\tan A + \tan B = 2\cot\frac{C}{2}$

$$\Leftrightarrow \frac{\sin(A + B)}{\cos A\cos B} = \frac{2\cos\frac{C}{2}}{\sin\frac{C}{2}} \Leftrightarrow \frac{2\sin\frac{C}{2}\cos\frac{C}{2}}{\cos A\cos B} = \frac{2\cos\frac{C}{2}}{\sin\frac{C}{2}}$$

$\Leftrightarrow \sin^2\frac{C}{2} = \frac{1}{2}[\cos(A+B) + \cos(A-B)]$

$\Leftrightarrow 1 - \cos C = -\cos C + \cos(A-B)$

$\Leftrightarrow A = B \Leftrightarrow \Delta ABC$ cân → Chọn (A)

3. $\sin 4A + \sin 4B + \sin 4C = 0$

$\Leftrightarrow 2\sin 2(A+B)\cos 2(A-B) + 2\sin 2C\cos 2C = 0$ (*)

Ta có: $2(A+B) = 2\pi - 2C \Rightarrow \sin 2(A+B) = -2\sin 2C$.

Vậy (*) $\Leftrightarrow \cos 2(A-B) = \cos 2C$

$\Leftrightarrow A - B = C \vee B - A = C$

$\Leftrightarrow A = B + C \vee B = A + C \Rightarrow \Delta$ vuông → Chọn (C)

4. $[(a+b)+c][(a+b)-c] = (a+b)^2 - c^2 = 3ab$

$\Leftrightarrow a^2 + b^2 + 2ab - (a^2 + b^2 - 2ab\cos C) = 3ab$

$\Leftrightarrow 2ab(\cos C + 1) = 3ab$

$\Leftrightarrow \cos C + 1 = \frac{3}{2} \Leftrightarrow \cos C = \frac{1}{2}$.

Vậy $C = 60^0$ → Chọn (B)

5. Ta có: $\tan B = \cot C$

$\Leftrightarrow \frac{\sin B}{\cos B} = \frac{\cos C}{\sin C} \Leftrightarrow \cos C\cos B - \sin B\sin C = 0$

$\Leftrightarrow \cos(B + C) = 0 \Leftrightarrow B + C = \frac{\pi}{2}$

$\Leftrightarrow \Delta ABC \perp$ tại A → Chọn (A)

6. $\frac{4}{\sin^2 A + \sin^2 B} = \frac{1}{\sin^2 A} + \frac{1}{\sin^2 B}$

$\Leftrightarrow \frac{4}{\sin^2 A + \sin^2 B} = \frac{\sin^2 A + \sin^2 B}{\sin^2 A.\sin^2 B}$

$\Leftrightarrow 4(\sin^2 A\sin^2 B) = (\sin^2 A + \sin^2 B)^2$

$\Leftrightarrow (\sin^2 A - \sin^2 B)^2 = 0 \Leftrightarrow A = B \Leftrightarrow \Delta ABC$ cân tại C → Chọn(C)

7. $\sin A + \sin C = \frac{3}{2}$

$\Leftrightarrow 2\sin\frac{A+C}{2}\cos\frac{A-C}{2} = \frac{3}{2}$

$\Leftrightarrow \cos\frac{B}{2}\cos\frac{A-C}{2} = \frac{3}{4}$

$\Leftrightarrow \frac{\sqrt{3}}{2}\cos\frac{A-C}{2} = \frac{3}{4}$

$\Leftrightarrow \cos\frac{A-C}{2} = \frac{\sqrt{3}}{2} \Leftrightarrow \frac{A-C}{2} = 30^0.$

Vậy $\begin{cases} A - C = 60^0 \\ A + C = 120^0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A = 90^0 \\ C = 30^0 \end{cases} \Rightarrow \Delta ABC$ vuông → Chọn (C)

8. $\cos^2A + \cos^2B + \cos^2C < 1$

$\Leftrightarrow (1 + \cos2A) + (1 + \cos2B) + (1 + \cos2C) < 2$

$\Leftrightarrow (\cos2A + \cos2B) + (1 + \cos2C) < 0$

$\Leftrightarrow 2\cos(A + B)\cos(A - B) + 2\cos^2C < 0$

$\Leftrightarrow -2\cos C\cos(A - B) + 2\cos^2C < 0$

$\Leftrightarrow -\cos C[\cos(A - B) + \cos(A + B)] < 0$

$\Leftrightarrow 2\cos C.\cos A.\cos C > 0$

ΔABC có 3 góc nhọn → Chọn (A)

9. $a + b + c \geq 3\sqrt[3]{abc}$ (1)

và $ab + ba + bc \geq 3\sqrt[3]{a^2b^2c^2}$ (2)

Lấy (1) × (2) $\Rightarrow (a + b + c)(ab + ba + bc) \geq 9abc$

Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow a = b = c \Leftrightarrow \Delta ABC$ đều → Chọn (D)

10. $\cos A.\cos B = \sin^2\frac{C}{2}$

$\Leftrightarrow \frac{1}{2}[\cos(A + B) + \cos(A - B)] = \frac{1}{2}[1 - \cos C]$

$\Leftrightarrow -\cos C + \cos(A - B) = 1 - \cos C \Leftrightarrow \cos(A - B) = 1$

$\Leftrightarrow A = B$ → Chọn (C). ■

NHÀ XUẤT BẢN ĐẠI HỌC QUỐC GIA HÀ NỘI
16 Hàng Chuối – Hai Bà Trưng – Hà Nội
Điện thoại: (04) 9724852; (04) 9724770; Fax: (04) 9714899

Chịu trách nhiệm xuất bản:

Giám đốc : PHÙNG QUỐC BẢO
Tổng biên tập : NGUYỄN BÁ THÀNH

Biên tập : Đức Hoàng – Trần Hưng
Chế bản : NS. Hồng Ân
Trình bày bìa : Ngọc Anh

---

360 BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM TỰ LUẬN LƯỢNG GIÁC

Mã số: 1L-302 ĐH2007
In 2.000 cuốn, khổ 16 x 24cm. Tại Công ty TNHH In Bao Bì Phong Tân
Số xuất bản: 897-2007/CXB/10-146/ĐHQGHN, ngày 12/11/2007.
Quyết định xuất bản số: 689 LK/XB
In xong và nộp lưu chiểu quý IV năm 2007.